УДК 511
ББК 22.11
В 93

Авторы-составители: С. А. Мокеева, канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель;
И. А. Кузменкова, канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель;
Е. М. Миронович, ассистент;
О. А. Мокеева, ассистент

Рецензенты: В. Н. Семенчук, д-р физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины;
В. И. Гойко, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». Протокол № 5 от 10 июня 2003 г.

В 93 **Высшая** математика. Математическое программирование : пособие по самостоятельному изучению основных вопросов программы курса и задания для самостоятельной работы студентов экономических специальностей / авт.-сост. : С. А. Мокеева [и др.]. — Гомель: УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации», 2005. — 116 с.
ISBN 985-461-144-2

УДК 511
ББК 22.11

ISBN 985-461-144-2

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данное пособие посвящено математическому программированию — области математики, разрабатывающей теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

При изучении математического программирования студенту потребуется знание общего курса высшей математики, теории вероятностей, математической статистики.

Пособие рекомендуется использовать студентам в процессе самостоятельной работы, а также преподавателям при проведении практических занятий.

В издании приводятся программа курса «Математическое программирование», теоретические сведения по основным ее вопросам и примеры решения типовых задач. Предлагаются также задания для самостоятельной работы, каждое из которых включает 35 вариантов задач.

Список рекомендуемой литературы содержит наименования основных литературных источников, которые предлагается использовать студентам при изучении курса и подготовке к решению задач.

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ПРОГРАММЫ КУРСА

Тема 1. Жордановы исключения

Решение систем линейных уравнений. Базисные и опорные решения системы линейных уравнений. Эквивалентные преобразования систем линейных уравнений и неравенств.

Тема 2. Линейное программирование

Примеры задач линейного программирования. Геометрический метод решения.

Тема 3. Симплекс-метод

Основная идея симплекс-метода. Алгоритм симплекс-метода. Метод искусственного базиса.

Тема 4. Теория двойственности в линейном программировании

Понятие двойственности. Построение двойственных задач и их свойства. Основные теоремы двойственности.

Тема 5. Транспортная задача

Закрытая и открытая модели транспортной задачи. Исходный опорный план и его построение способами северо-западного угла и минимальной стоимости. Метод потенциалов для решения транспортной задачи. Оптимальный план.

Тема 6. Целочисленное программирование

Постановка задачи целочисленного линейного программирования. Общая идея метода Гомори. Алгоритм метода Гомори.

Тема 7. Нелинейное программирование

Общая задача нелинейного программирования. Метод множителей Лагранжа.

Тема 8. Динамическое программирование

Многошаговые процессы в динамических задачах. Изложение принципов динамического программирования на примере задачи о выборе наиболее экономного маршрута доставки груза.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОСНОВНЫМ ВОПРОСАМ ПРОГРАММЫ КУРСА И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Решение систем линейных уравнений. Базисные и опорные решения

Жордановы исключения — одно из алгебраических преобразований, лежащих в основе удобного вычислительного аппарата, используемого в математическом программировании. Суть метода состоит в следующем.

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases}$$

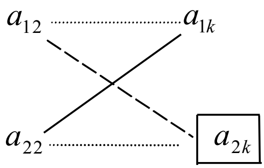
представляется в форме таблицы, которую в последующем будем называть *жордановой* (табл. 1).

Таблица 1

Базисные переменные (БП)	x_1	x_2	…	x_k	…	x_m	B_n
	a_{11} a_{21} … a_{n1}	a_{12} a_{22} … a_{n2}	… … … …	a_{1k} a_{2k} … a_{nk}	… … … …	a_{1m} a_{2m} … a_{nm}	b_1 b_2 … b_m

Выбирается разрешающий элемент, например, $a_{2k} \neq 0$. Переход к следующей таблице (*шаг жордановых исключений*) осуществляется по нижеуказанным правилам:

1. В базис заносится x_k.
2. Элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент.
3. Все элементы разрешающего столбца (кроме разрешающего элемента) заменяются нулями и остаются таковыми до конца преобразований.
4. Все остальные элементы таблицы вычисляются по *правилу прямоугольника* следующим образом:



$$a'_{12} = \frac{a_{12} \cdot a_{2k} - a_{22} \cdot a_{1k}}{a_{2k}} .$$

Таким образом, преобразованный элемент равен разности произведений элементов, расположенных на главной (разрешающий элемент и преобразуемый элемент) и побочной диагоналях, деленной на разрешающий элемент, выделенный рамкой.

Сформулированного правила следует придерживаться независимо от того, в какой вершине прямоугольника расположен разрешающий элемент.

Пересчет элементов производится до тех пор, пока не будет заполнен столбец базисных переменных.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 \qquad\quad - x_4 = -6, \\ \qquad\quad x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad\quad = 6. \end{cases}$$

Решение. Запишем коэффициенты и свободные члены в табл. 2.

Таблица 2

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	B_n
	(1)	1	–3	2	6
	1	–2	0	–1	–6
	0	1	1	3	16
	2	–3	2	0	6
x_1	1	1	–3	2	6
	0	–3*	3	–3	–12
	0	1**	1	3	16
	0	–5	8	–4	–6

---

* $-3 = \dfrac{1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1}{1}$.

** $1 = \dfrac{1 \cdot 1 - 0 \cdot 1}{1}$.

Элементы второй строки разделим на (–3) (табл. 3).

Таблица 3

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	B_n
x_1	1	1	–3	2	6
	0	(1)	–1	1	4
	0	1	1	3	16
	0	–5	8	–4	–6
x_1	1	0	–2	1	2
x_2	0	1	–1	1	4
	0	0	2	2	12
	0	0	3	1	14

Элементы третьей строки разделим на 2 (табл. 4).

Таблица 4

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	B_n
x_1	1	0	–2	1	2
x_2	0	1	–1	1	4
	0	0	(1)	1	6
	0	0	3	1	14
x_1	1	0	0	3	14
x_2	0	1	0	2	10
x_3	0	0	1	1	6
	0	0	0	–2	–4

Разделим элементы четвертой строки на (–2) (табл. 5).

Таблица 5

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	B_n
x_1	1	0	0	3	14
x_2	0	1	0	2	10
x_3	0	0	1	1	6
	0	0	0	(1)	2
x_1	1	0	0	0	8
x_2	0	1	0	0	6
x_3	0	0	1	0	4
x_4	0	0	0	1	2

Данная система имеет единственное решение: $x_1 = 8$; $x_2 = 6$; $x_3 = 4$; $x_4 = 2$.

Ответ: (8; 6; 4; 2).

Если в ходе преобразований образовалась нулевая строка, то ее вычеркивают.

В случае, когда в результате жордановых исключений получается нулевая строка с ненулевым свободным членом, *система несовместна* (табл. 6).

Таблица 6

БП	x_1	x_2	x_3	B_n
x_2	2	1	0	3
x_3	0	0	0	4

В случае, когда не все переменные вошли в базис, *система имеет бесконечно много решений*. Например, в конечном шаге жордановых исключений получили табл. 7.

Таблица 7

БП	x_1	x_2	x_3	B_n
x_2	2	1	0	$\frac{14}{3}$
x_3	3	0	1	$-\frac{7}{3}$

Тогда *общее решение системы* — $x_2 = \frac{14}{3} - 2x_1$, $x_3 = -\frac{7}{3} - 3x_1$, $x_1 \in R$, где x_1 — свободная переменная, x_2 и x_3 — базисные.

При нулевых значениях свободных переменных получаем одно из *базисных решений.*

Если система линейных уравнений имеет n неизвестных и ее ранг равен m, то базисных решений может быть не более $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

В экономических задачах отрицательные значения переменных, как правило, не имеют реального смысла. Поэтому рассмотрим способ отыскания неотрицательных решений системы линейных уравнений. Неотрицательные базисные решения занимают особое место в математическом программировании и называются *опорными решениями.*

Для отыскания опорного решения системы линейных уравнений ее нужно представить в виде жордановой таблицы так, чтобы все свободные члены были неотрицательными. Затем следует произвести возможное число шагов жордановых исключений, выбирая разрешающие элементы среди положительных чисел основной части таблицы по наименьшему отношению свободных членов к соответствующим положительным элементам столбца, выбранного разрешающим. Искомое опорное решение найдется приравниванием свободных переменных к нулю, а базисных — к свободным членам.

Если в ходе жордановых исключений встретится строка, в которой все элементы неположительны, а свободный член неотрицателен, то данная система не имеет неотрицательных (в частности, опорных) решений, хотя и является совместной.

Пример 2. Найти опорное решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 2, \\ 3x_1 \qquad - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде таблицы, предварительно умножив третье уравнение на (–1) (табл. 8).

Таблица 8

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	B_n
	2	–1	1	–1	3
	2	–1	0	1	2
	–3	0	1	1	1

В качестве разрешающего можно взять любой столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент, например третий столбец. Разрешающую строку определим по наименьшему отношению свободных членов к положительным элементам третьего столбца:

$$\min\left\{\frac{3}{1}; \frac{1}{1}\right\} = \frac{1}{1} = 1.$$

Меньшее из этих отношений соответствует третьей строке, она и будет разрешающей. На пересечении третьей строки и третьего столбца находится разрешающий элемент 1, с которым и выполняется шаг жорданова исключения (табл. 9).

Таблица 9

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	B_n	
	2	–1	1	–1	3	
	2	–1	0	1	2	
	–3	0	(1)	1	1	←
			↑			
	(5)	–1	0	–2	2	←
	2	–1	0	1	2	
x_3	–3	0	1	1	1	
	↑					

Выберем разрешающим первый столбец. Разрешающая строка найдена по наименьшему отношению:

$$\min\left\{\frac{2}{5};\ \frac{2}{2}\right\}=\frac{2}{5}.$$

Ею оказалась первая строка (табл. 10).

Таблица 10

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	B_n
x_1	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
	0	$-\frac{3}{5}$	0	$\left(\frac{9}{5}\right)$	$\frac{6}{5}$
x_3	0	$-\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{11}{5}$

В этой таблице разрешающим элементом может быть только $\frac{9}{5}$, так как других положительных элементов нет (табл. 11).

Таблица 11

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	B_n
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
x_4	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
x_3	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{7}{3}$

Общее решение — $x_1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x_2,\ \ x_3=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}x_2,\ x_4=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x_2,\ x_2\in R.$

При $x_2 = 0$ получаем *базисное решение*: $\left(\frac{2}{3};\ 0;\ \frac{7}{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

Так как в это решение не входят отрицательные числа, то оно является *опорным*.

Ответ: $\left(\frac{2}{3};\ 0;\ \frac{7}{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

Пример 3. Найти опорное решение системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Получаем табл. 12.

Таблица 12

БП	x_1	x_2	x_3	B_n
	–3 1	–4 (2)	8 –6	4 2
 x_2	–1 $\frac{1}{2}$	0 1	–4 –3	8 1

Первой строке соответствует уравнение $x_1 + 4x_3 + 8 = 0$, не удовлетворяющееся ни при каких $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$. Следовательно, данная система не имеет неотрицательных решений (опорных).

Ответ: опорных решений нет.

2. Графический способ решения задач линейного программирования

2.1. Задачи с двумя переменными

Алгоритм графического метода рассмотрим на примере.

Пример 4. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$z = 2x_1 - 3x_2 \to \max(\min);$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \geq 18, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Задачу решаем в следующем порядке:

1) Строим область допустимых решений как общую часть полуплоскостей, соответствующих данным неравенствам:

• Решением линейного неравенства с двумя неизвестными $9x_1 + 4x_2 \geq 18$ является бесконечное множество пар значений этих неизвестных, удовлетворяющих данному неравенству. В системе координат x_1Ox_2 неравенство определяет полуплоскость с граничной прямой $9x_1 + 4x_2 = 18$. Чтобы найти эту полуплоскость, нужно сначала построить граничную прямую со следующими значениями:

x_1	x_2
0	4,5
2	0

Затем необходимо взять какую-нибудь точку, не лежащую на данной прямой, например (0; 0). Если координаты этой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой будет полуплоскость, в которой находится взятая точка. В противном случае берется полуплоскость, которой взятая точка не принадлежит.

Итак, $9 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 18$. Берем полуплоскость, в которой не лежит точка (0; 0) (рис. 1).

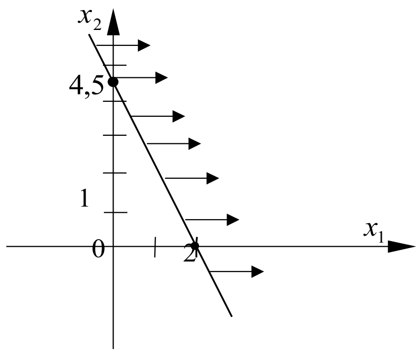


Рис. 1

• В системе координат x_1Ox_2 неравенство $-2x_1 + x_2 \leq 2$ определяет полуплоскость с граничной прямой $-2x_1 + x_2 = 2$.

Строим прямую со следующими значениями:

x_1	x_2
0	2
–1	0

При подстановке точки с координатами (0; 0) неравенство $-2 \cdot 0 + 0\ 2$ является верным.

Следовательно, берем полуплоскость с точкой (0; 0).

• Неравенство $x_1 \leq 4$ определяет полуплоскость граничной прямой $x_1 = 4$.

Чтобы определить искомую полуплоскость, возьмем точку (0; 0) и подставим ее координаты в неравенство $0 \leq 4$, которое является верным.

Следовательно, берем полуплоскость с точкой (0; 0).

• Точки, удовлетворяющие ограничениям $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, находятся в координатной четверти I.

Для нахождения области допустимых решений полуплоскости, соответствующие данным неравенствам, строим в одной координатной плоскости.

Таким образом, областью допустимых решений будет многоугольник *ABCD* (рис. 2).

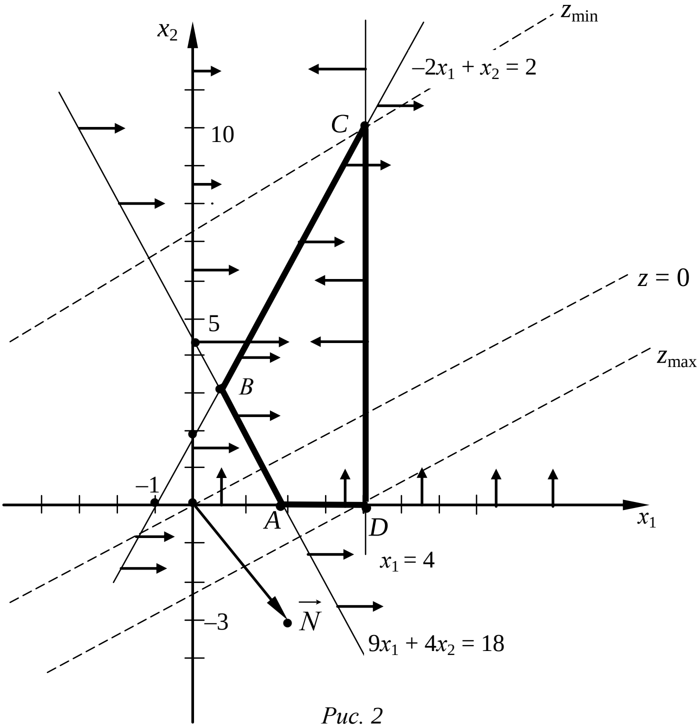


Рис. 2

2) Строим вектор $\vec{N}$. Его координаты — коэффициенты целевой функции $\vec{N}(2; -3)$. Так как вектор $\vec{N}$ находим лишь для выяснения направления, то для большей наглядности можно построить вектор $\lambda\vec{N}(\lambda > 0)$.

3) Строим прямую $z = 0$, т. е. $2x_1 - 3x_2 = 0$, которая проходит перпендикулярно вектору $\vec{N}$, со следующими значениями:

x_1	x_2
0	0
3	2

Параллельным перемещением прямой $z = 0$ вдоль вектора $\vec{N}$ находим точку D, в которой функция z достигает наибольшего значения, и точку C, в которой функция z достигает наименьшего значения.

4) Координаты точки D находим по графику D (4; 0).

Координаты точки C можно найти, решив систему уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 10, \\ x_1 = 4. \end{cases}$$

Итак, C (4; 10).

5) Находим z_{max} и z_{min}:

$z_{max} = z(4; 0) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 = 8$,

$z_{min} = z(4; 10) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 10 = -22$.

Ответ: $z_{max}(4; 0) = 8$; $z_{min}(4; 10) = -22$.

В зависимости от характера области допустимых решений и взаимного расположения области и вектора $\vec{N}$ могут встретиться случаи, изображенные на рисунках.

На рис. 3 функция достигает минимума в точке A, а максимума — в любой точке отрезка DE.

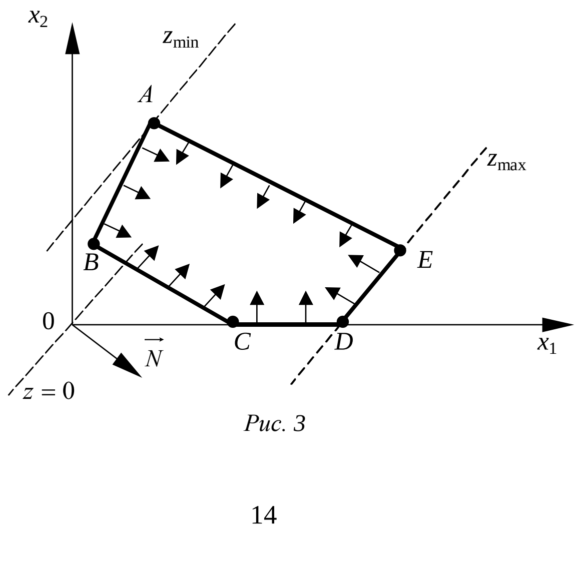


Рис. 3

На рис. 4 максимум достигается в точке *A*, а минимума функция не имеет $(z \to -\infty)$.

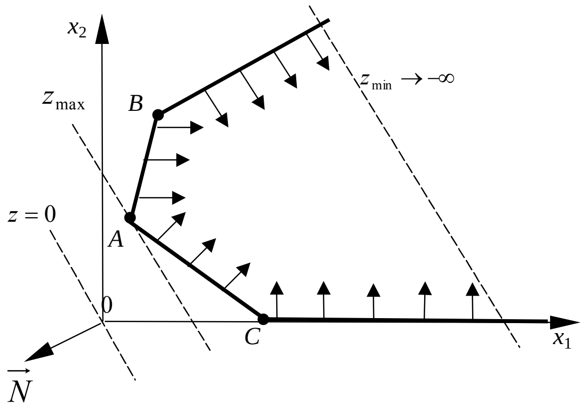


Рис. 4

На рис. 5 функция не имеет ни максимума $(z \to +\infty)$, ни минимума $(z \to -\infty)$.

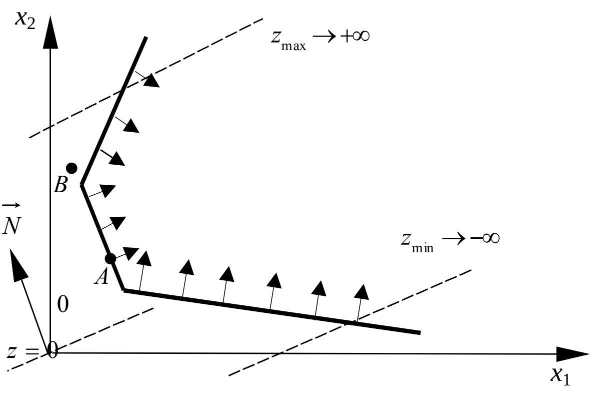


Рис. 5

2.2. Задачи со многими переменными

Задачу со многими переменными можно решить графически, если в ее канонической записи присутствует не более двух свободных переменных, т. е. $n - r \leq 2$, где n — число переменных, а r — ранг матрицы системы ограничительных уравнений задачи. Чтобы решить такую задачу, систему ограничительных уравнений надо преобразовать к разрешенному виду, т. е. выделить некоторый базис переменных. Затем базисные переменные следует опустить и перейти к эквивалентной системе неравенств. Целевая функция также должна быть выражена только через свободные переменные. Полученную двухмерную задачу решают обычным графическим методом. Найдя две координаты оптимального решения, их подставляют в ограничительные уравнения исходной задачи и определяют остальные координаты оптимального решения.

Пример 5. Найти оптимальное сочетание посевов сельскохозяйственных культур (пшеницы и кукурузы) на участках различного плодородия площадью 100 и 200 га. Данные об урожайности в ц/га приведены в табл. 13. По плану должно быть собрано не менее 1500 ц пшеницы и 4500 ц кукурузы. Цена 1 ц пшеницы — 6 усл. ед., кукурузы — 4 усл. ед. Критерий оптимальности — максимум валовой продукции в денежном выражении.

Таблица 13

Культура	Урожайность	
	1-го участка	2-го участка
Пшеница	20	15
Кукуруза	35	30

Решение. Обозначим через x_1 площадь, отводимую под посев пшеницы на первом участке, через x_2 — на втором участке, через x_3 и x_4 — площади, отводимые под посев кукурузы соответственно на первом и втором участках.

Площади выражаются неотрицательными числами, т. е. $x_j \geq 0$ $(j = \overline{1;4})$.

Так как на первом участке планируется x_1 га засеять пшеницей и x_3 га — кукурузой, то должно выполняться равенство $x_1 + x_3 = 100$.

Для второго участка аналогичное условие запишется так: $x_2 + x_4 = 200$.

С первого участка предполагается собрать $20x_1$ ц, а со второго участка — $15x_2$ ц пшеницы. Всего же необходимо собрать не менее

1500 ц. Это требование можно выразить записью $20x_1 + 15x_2 \geq 1500$. Аналогичное требование к валовому сбору кукурузы приводит к неравенству $35x_3 + 30x_4 \geq 4500$.

Стоимость пшеницы, которую предполагается собрать с обоих участков, составит $6 \cdot (20x_1 + 15x_2)$ усл. ед., стоимость кукурузы — $4 \cdot (35x_3 + 30x_4)$ усл. ед., а общая стоимость валовой продукции выразится суммой $f = 120x_1 + 90x_2 + 140x_3 + 120\,x_4$.

Введем дополнительные переменные $x_5 \geq 0$ и $x_6 \geq 0$. Преобразуем составленную ранее модель в каноническую форму:

$$f = 120x_1 + 90x_2 + 140x_3 + 120x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 100, \\ x_2 + x_4 = 200, \\ 20x_1 + 15x_2 - x_5 = 1500, \\ 35x_3 + 30x_4 - x_6 = 4500, \\ x_j \geq 0 \;\; (j = \overline{1;6}). \end{cases}$$

Теперь в системе ограничительных уравнений выделим какой-либо базис и убедимся, что число свободных переменных не превышает двух. Затем перейдем к эквивалентной системе неравенств

$$f = 38000 - 20x_1 - 30x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_3 = 100 - x_1, \\ x_4 = 200 - x_2, \\ x_5 = -1500 + 20x_1 + 15x_2, \\ x_6 = 5000 - 35x_1 - 30x_2. \end{cases}$$

Опуская неотрицательные базисные переменные x_3, x_4, x_5 и x_6, приходим к двухмерной задаче, записанной в симметричной форме:

$$f = -\,20x_1 - 30x_2 + 38000 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 100, \\ x_2 \leq 200, \\ 20x_1 + 15x_2 \geq 1500, \\ 35x_1 + 30x_2 \leq 5000, \\ x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение задачи приведено на рис. 6.

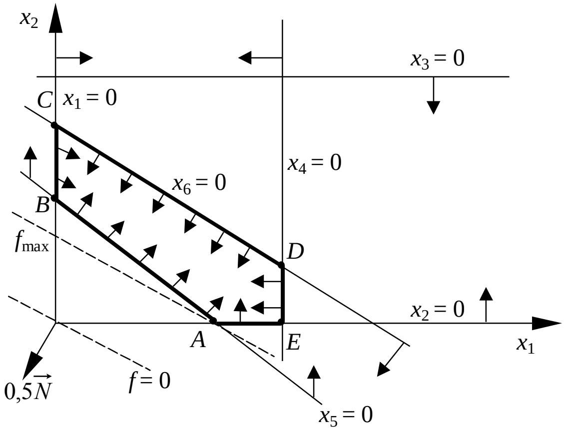


Рис. 6

На каждой граничной прямой одна из переменных исходной задачи обращается в нуль. Так, неравенству $20x_1 + 15x_2 \geq 1500$ соответствует граничная прямая *AB* с уравнением $20x_1 + 15x_2 = 1500$. Но указанное неравенство образовано из уравнения $x_5 = -1500 + 20x_1 + 15x_2$ системы уравнений путем отбрасывания переменной x_5, следовательно, на прямой *AB* $x_5 = 0$.

На рис. 6 видно, что наибольшего значения функция f достигает в точке *A* пересечения прямых *AB* и *AE* ($x_2 = 0$), поэтому $x_1^* = 75$, $x_2^* =$ $= 0$. Одновременно в этой вершине $x_5^* = 0$.

Значения других компонентов оптимального плана находим из уравнений $x_3 = 100 - x_1$; $x_4 = 200 - x_2$; $x_6 = 5000 - 35x_1 - 30x_2$, т. е. $x_3^* =$ $= 100 - 75 = 25$, $x_4^* = 200$, $x_6^* = 2375$, при этом $f_{max} = 36500$.

Итак, пшеницу следует посеять только на первом участке и занять ею площадь в 75 га; кукурузу надо посеять на обоих участках, причем на первом участке объем засеваемых площадей должен составить 25 га, а на втором участке — 200 га. Тогда валовая продукция достигнет (в денежном выражении) максимума и составит 36500 усл. ед.

Дополнительные переменные x_5 и x_6, которые в канонической записи задачи соответственно равны $x_5 = (20x_1 + 15x_2) - 1500$; $x_6 = (35x_3 +$ $+ 30x_4) - 4500$, имеют вполне определенный экономический смысл: это превышение сбора пшеницы и кукурузы над плановым заданием. При найденном оптимальном сочетании посевов задание по сбору пшеницы будет выполнено ($x_5^* = 0$), а по сбору кукурузы — перевыполнено на 2375 ц ($x_6^* = 2375$).

3. Симплексный метод

Среди универсальных методов решения задач линейного программирования (ЗЛП) наиболее распространен *симплексный метод* (или *симплекс-метод*), разработанный американским ученым Дж. Данцигом (1949 г.). Симплекс-метод называют также *методом последовательного улучшения плана.*

3.1. Построение начального опорного плана

Рассмотрим три случая построения начального опорного плана.

Первый случай. Пусть ЗЛП представлена системой ограничений в каноническом виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i,\ b_i \geq 0\ (i = \overline{1;m}).$$

Говорят, что ограничение ЗЛП имеет *предпочтительный вид*, если при неотрицательности правой части ($b_i \geq 0$) левая часть ограничения содержит переменную с коэффициентом, равным единице, а остальные ограничения — с коэффициентом, равным нулю.

Если каждое ограничение-равенство ЗЛП в каноническом виде содержит переменную, входящую в левую часть с коэффициентом, равным нулю (при неотрицательности правых частей), то говорят, что система ограничений представлена в *предпочтительном виде*. В этом случае *начальный опорный план* строится весьма просто (базисный с неотрицательными координатами). Предпочтительные переменные выбираются в качестве *базисных*, а все остальные — *свободные*. Свободные переменные приравниваются к нулю, а базисные переменные — к свободным членам.

Второй случай. Пусть система ограничений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i,\ b_i \geq 0\ (i = \overline{1;m}).$$

Сведем задачу к каноническому виду. Для этого добавим к левым частям неравенств дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0\ (i = \overline{1;m})$. Получим систему, эквивалентную исходной:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = b_i,\ b_i \geq 0\ (i = \overline{1;m}),$$

которая имеет предпочтительный вид. Следовательно, *начальный опорный план* примет следующий вид:

$$x_0 = (\underbrace{0; 0; \ldots; 0}_{n}; \underbrace{b_1; b_2; \ldots; b_m}_{m}).$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю: $c_{n+i} = 0 \ (i = \overline{1; m})$.

Третий случай. Пусть система ограничений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, \ b_i \geq 0 \ (i = \overline{1; m}).$$

Перейдем к каноническому виду путем введения дополнительных переменных $x_{n+i} \geq 0 \ (i = \overline{1; m})$, которые вычитаем из левых частей неравенств системы. Получим систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - x_{n+i} = b_i, \ b_i \geq 0 \ (i = \overline{1; m}).$$

Теперь система ограничений не имеет предпочтительного вида, так как дополнительные переменные x_{n+i} входят в левую часть (при $b_i \geq 0$) с коэффициентами, равными –1. В этом случае вводится так называемый *искусственный базис* путем перехода к *М-задаче.* Ее рассмотрим в пункте 3.9.

3.2. Симплексные таблицы

Приведя модель ЗЛП к предпочтительному виду, ее заносят в так называемую *симплексную таблицу* (табл. 14).

Таблица 14

БП	$c_Б$	A_0	x_1	…	x_j	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+i}	…	x_{n+m}
			c_1	…	c_j	…	c_n	c_{n+1}	c_{n+2}	…	c_{n+i}	…	c_{n+m}
x_{n+1}	c_{n+1}	b_{n+1}	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	1	0	…	0	…	0
x_{n+2}	c_{n+2}	b_{n+2}	a_{21}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	0	1	…	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+i}	c_{n+i}	b_{n+i}	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}	0	0	…	1	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	c_{n+m}	b_{n+m}	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	0	0	…	0	…	1
$z_j - c_j$		Δ_0	Δ_1	…	Δ_j	…	Δ_n	0	0	…	0	…	0

В данной таблице жирной чертой отмечена рабочая часть таблицы, содержащая элементы, над которыми будут производиться преобразования с целью получения оптимального плана.

Имеют место следующие обозначения:

$x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ — свободные переменные;

$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+i}, \ldots, x_{n+m}$ — базисные (предпочтительные) переменные;

$c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_n$ — коэффициенты целевой функции при свободных переменных;

$c_Б = (c_{n+1}; c_{n+2}; \ldots; c_{n+i}; \ldots; c_{n+m})$ — вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных;

$A_0 = (b_{n+1}; b_{n+2}; \ldots; b_{n+i}; \ldots; b_{n+m})^T$ — вектор-столбец свободных членов системы ограничений;

$A_j = (a_{1j}; a_{2j}; \ldots; a_{ij}; \ldots; a_{mj})^T$ — вектор-столбец коэффициентов при переменных x_j;

$\Delta_0 = c_Б \cdot A_0$ — значение целевой функции для начального опорного плана x_0, т. е. $\Delta_0 = z(x_0)$;

$\Delta_j = c_Б \cdot A_j - c_j$ — оценки свободных переменных;

$(i = \overline{1; m};\ j = \overline{1; n})$.

Последнюю строку $(z_j - c_j)$ таблицы называют *индексной строкой* (*строкой целевой функции или строкой оценок*).

3.3. Признак оптимальности опорного плана

Теорема 1. Пусть исходная задача решается на максимум. Если для некоторого опорного плана все оценки $\Delta_j (j = \overline{1; n})$ неотрицательны, то такой план *оптимален*.

Теорема 2. Если исходная задача решается на минимум и для некоторого опорного плана все оценки $\Delta_j (j = \overline{1; n})$ неположительны, то такой план *оптимален*.

3.4. Переход к нехудшему опорному плану

Рассмотрим ЗЛП на *максимум.* Приводим ее к каноническому виду и заносим в симплексную таблицу.

Если все $\Delta_j \geq 0$, то начальный опорный план x_0 оптимален.

Если же существуют $\Delta_j < 0$, то план не оптимален, при определенных условиях его можно улучшить.

Среди отрицательных оценок находят максимальную по абсолютной величине: $\max\limits_{\Delta_j<0}\left|\Delta_j\right| = \left|\Delta_{j_0}\right|$.

Вектор-столбец A_{j_0}, для которого $\Delta_{j_0} < 0$, называется *разрешающим,* а соответствующая переменная x_{j_0} — *перспективной*.

Замечание. Если задача решается на минимум, то разрешающий столбец выбирается из условия $\max\limits_{\Delta_j>0}\Delta_j = \Delta_{j_0}$.

Переменную x_{j_0}, соответствующую разрешающему столбцу, следует ввести в базис. Для определения переменной, выводимой из базиса, находят отношения

$$\frac{b_i}{a_{ij_0}},\ a_{ij_0} > 0 .$$

Они называются *симплексными.*

Среди симплексных отношений определяют наименьшее, т. е.

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ij_0}}\right\} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} .$$

Если это условие выполняется при нескольких i, то в качестве i_0 можно выбрать любое.

Оно и укажет строку, в которой содержится исключаемая из базиса переменная x_{i_0}. Строка i_0, соответствующая минимальному симплексному отношению, называется *разрешающей.* Элемент, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки $a_{i_0 j_0}$, также называется *разрешающим* (или *ключевым*). Переменная x_{i_0}, присутствующая в базисе, является неперспективной, ее следует вывести из базиса.

Замечание. Поскольку $\min z = -\max(-z)$, задачу минимизации можно формально заменить задачей максимизации функции $-z$. Затем полученный максимум следует взять с противоположным знаком. Это и будет искомый минимум исходной ЗЛП.

3.5. Симплексные преобразования

Чтобы завершить шаг преобразований, ведущих к новому опорному плану, составляют таблицу по следующим *правилам*:

1. Элементы строки i_0 новой таблицы равны соответствующим элементам разрешающей строки старой таблицы, деленным на разрешающий элемент.

2. Все элементы столбца j_0 новой таблицы равны нулю, за исключением $a'_{i_0 j_0} = 1$.

3. Чтобы получить все остальные элементы (включая элементы индексной строки) новой таблицы, нужно воспользоваться *правилом прямоугольника* (рис. 7).

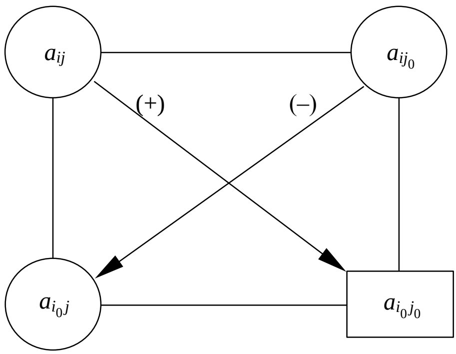


Рис. 7

Для этого в прежней таблице выделяют прямоугольник, вершинами которого служат нужные для вычисления элементы. Диагональ, содержащую разрешающий ($a_{i_0j_0}$) и искомый (a_{ij}) элементы новой таблицы, называют *главной,* а другую — *побочной.* Чтобы получить элемент $a'_{ij}, (i = i_0;\ j \neq j_0)$ новой симплексной таблицы, нужно из произведения угловых элементов главной диагонали вычесть произведение угловых элементов побочной диагонали и полученное число разделить на разрешающий элемент, выделенный рамкой:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{i_0 j_0} - a_{ij_0} \cdot a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}.$$

Однако любой элемент новой таблицы можно найти по *правилу треугольника:* для получения любого элемента новой симплексной таблицы нужно из соответствующего элемента прежней таблицы вычесть произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенное на разрешающий элемент:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i_0 j} \cdot a_{ij_0}}{a_{i_0 j_0}}.$$

Шаг симплексного метода, позволяющий перейти от одного опорного плана к другому нехудшему, называется *итерацией.* Таким образом, симплексный метод является *итеративным методом последовательного улучшения плана.*

3.6. Контроль вычислений

Для контроля вычислений элементов индексной строки применяются формулы $\Delta_0 = c_Б \cdot A_0$, $\Delta_j = c_Б \cdot A_j - c_j$.

3.7. Альтернативный оптимум (*признак бесконечности множества оптимальных планов*)

Теорема 3. Если в индексной строке последней симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, имеется хотя бы одна нулевая оценка, соответствующая свободной переменной, то ЗЛП имеет *бесконечное множество оптимальных планов.*

Следствие. Если в индексной строке симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, все оценки свободных переменных положительны, то найденный *оптимальный план единственный.*

3.8. Признак неограниченности целевой функции

Теорема 4. Если в индексной строке симплексной таблицы ЗЛП на максимум (минимум) содержится отрицательная (положительная) оценка $\Delta_{j_0} < 0$ $(\Delta_{j_0} > 0)$, а в соответствующем столбце переменной x_{j_0} нет ни одного положительного элемента, то целевая функция на множестве допустимых планов задачи не ограничена сверху (снизу). *Задача неразрешима*.

С экономической точки зрения неограниченность целевой функции ЗЛП свидетельствует только об одном: разработанная модель недостаточно точна.

Пример 6. Решить симплексным методом задачу

$$z = -6x_1 - 3x_2 \to \min;$$
$$\begin{cases} -2x_1 - 7x_2 \ge -14, \\ x_2 \le 3, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;2}). \end{cases}$$

Решение. Упорядочим запись исходной задачи. Так как в первом неравенстве системы ограничений свободный член отрицателен, то умножим первое неравенство на –1. В результате получим

$$z = -6x_1 - 3x_2 \to \min;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \le 14, \\ x_2 \le 3, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;2}). \end{cases}$$

Ограничения-неравенства имеют вид $\le$, следовательно, целевая функция должна быть на максимум. В нашем случае задачу на минимум можно заменить задачей максимизации, а для этого умножим целевую функцию на –1. Получаем

$$z' = 6x_1 + 3x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \le 14, \\ x_2 \le 3, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;2}). \end{cases}$$

Итак, запишем задачу в каноническом виде. Для этого добавим к левым частям неравенств дополнительные переменные x_3, x_4, x_5. В целевую функцию они сводятся с коэффициентами, равными нулю:

$$z' = 6x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 14, \\ x_2 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 9x_2 + x_5 = 36, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

Задача имеет предпочтительный вид.

Переменные x_3, x_4, x_5 — базисные, а x_1, x_2 — свободные. Положим, что $x_1 = x_2 = 0$, тогда $x_3 = 14$, $x_4 = 3$, $x_5 = 36$. Следовательно, $x_0 = (0; 0; 14; 3; 36)$ является начальным опорным планом.

При этом $z' = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 14 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 36 = 0$. Заносим условие задачи в симплексную табл. 15.

Таблица 15

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
			6	3	0	0	0	
x_3	0	14	(2)	7	1	0	0	←
x_4	0	3	0	1	0	1	0	
x_5	0	36	4	9	0	0	1	
$z'_j - c_j$		0	–6	–3	0	0	0	
			↑					

Наличие в индексной строке (z'-строке) отрицательных оценок при решении задачи на максимум свидетельствует о том, что оптимальное решение не получено. От табл. 15 перейдем к табл. 16.

Разрешающий столбец находим по max {|–6|, |–3|}= 6. Разрешающая строка определяется по минимуму отношений свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца, т. е.

$$\min\left\{\frac{14}{2}; \frac{36}{4}\right\} = \frac{14}{2} = 7 .$$

На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится разрешающий элемент 2.

В табл. 16 вместо x_3 в базис вводим переменную x_1.

В новой таблице на месте разрешающего элемента пишем 1, все остальные элементы разрешающего столбца — нули, элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент. Все остальные элементы табл. 16 вычисляются по правилу прямоугольника.

Таблица 16

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			6	3	0	0	0
x_1	6	7	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
x_4	0	3	0	1	0	1	0
x_5	0	8	0	–5	–2	0	1
$z'_j - c_j$		42	0	18	3	0	0

В индексной строке табл. 16 нет отрицательных элементов. Следовательно, мы получаем оптимальный план $x^* = x_{опт} = (7; 0; 0; 3; 8)$. Тогда $z'_{\max} = z(x_{опт}) = 42$, $z_{\min} = z(x_{опт}) = -42$.

Ответ: $x_{опт} = (7; 0; 0; 3; 8)$, $z_{\min} = -42$.

Пример 7. Решить задачу

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ 4x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Сведем задачу к каноническому виду. Получим

$$z = 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_2 + x_4 = 10, \\ x_j \ge 0\ \ (j = \overline{1;4}). \end{cases}$$

Занесем условие в симплексную табл. 17. Начальный опорный план имеет вид $x_0 = (0; 0; 3; 10)$, $z(x_0) = 0$.

Таблица 17

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4
			2	1	0	0
x_3	0	3	–1	1	1	0
x_4	0	10	0	4	0	1
$z_j - c_j$		0	–2	–1	0	0
			↑			

Задача решается на максимум. Опорный план x_0 неоптимальный, так как существуют отрицательные оценки. Находим разрешающий столбец по $\max\{|-2|, |-1|\} = 2$.

Итак, в базис нужно вводить переменную x_1, но все элементы разрешающего столбца неположительны. Следовательно, по теореме 4 (признак неограниченности целевой функции) целевая функция на множестве допустимых планов не ограничена сверху, т. е. $z_{\max} \to \infty$.

Ответ: $z_{\max} \to \infty$.

3.9. Метод искусственного базиса (*М-задача*)

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом начинается с нахождения какого-либо опорного плана.

Рассмотрим третий случай (первый и второй описаны в пункте 3.1).

Пусть система ограничений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ b_i \ge 0 \ \ (i = \overline{1;m}).$$

Перейдем к каноническому виду путем введения дополнительных переменных $x_{n+i} \ge 0 \ (i = \overline{1;m})$, которые вычитаем из левых частей неравенств системы. Получим систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i,\ b_i \ge 0 \ (i = \overline{1;m}).$$

Теперь система ограничений не имеет предпочтительного вида, так как дополнительные переменные x_{n+i} входят в левую часть (при $b_i \ \ge \ 0$) с коэффициентами, равными –1. В этом случае вводится так называемый *искусственный базис* путем перехода к *М-задаче.*

К левым частям ограничений-равенств, не имеющих предпочтительного вида, добавляют искусственные переменные w_i. В целевую функцию переменные w_i вводят с коэффициентом M в случае решения задачи на минимум и с коэффициентом $-M$ — для задачи на максимум, где M — большое положительное число. Полученная задача называется *М-задачей*, соответствующей исходной. Она всегда имеет предпочтительный вид.

Пусть исходная задача линейного программирования имеет вид

$$z = \sum_{j=1`}^{n} c_j x_j \to \max(\min); \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ b_i \ge 0 \ \ (i = \overline{1;m}), & (2) \\ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1;n}). & (3) \end{cases}$$

При этом ни одно из ограничений не имеет предпочтительной переменной. *М-задача* запишется так:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - (+)\sum_{i=1}^{m} M w_i \to \max(\min); \tag{4}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i = b_i \quad (i = \overline{1;m}), & (5) \\ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1;n}),\ w_i \ge 0 \ \ (i = \overline{1;m}), & (6) \end{cases}$$

где знак «–» в функции (4) относится к задаче на максимум. Задача (4)–(6) имеет предпочтительный вид. Ее начальный опорный план —

$$x_0 = (\underbrace{0; 0; \ldots; 0}_{n}; b_1; b_2; \ldots; b_m)\ .$$

Если некоторые из уравнений (2) имеют предпочтительный вид, то в них не следует вводить искусственные переменные.

Теорема 5. Если в оптимальном плане $x_{опт} = (x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*; w_1^*; w_2^*; \ldots; w_m^*)$ *M*-задачи (4)–(6) все искусственные переменные $w_i = 0 \ (i = \overline{1;m})$, то план $x^* = (x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*)$ является оптимальным планом исходной задачи (1)–(3).

Теорема 6 **(*признак несовместности системы ограничений*).** Если в оптимальном плане *M*-задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то система ограничений исходной задачи несовместна.

В случае *M*-задачи индексную строку симплексной таблицы разбиваем на две. В первой строке записываются свободные члены выражений $\Delta_0 = c_Б \cdot A_0$ и $\Delta_j = c_Б \cdot A_j - c_j$, а во второй — коэффициенты, содержащие *M*. Признак оптимальности проверяется сначала по второй строке. По ней же определяется переменная, подлежащая включению в базис. По мере исключения из базиса искусственных переменных соответствующие им столбцы элементов можно опускать. Объясняется это тем, что искусственные переменные в базис не возвращают, а поэтому отвечающие им столбцы больше не потребуются. После исключения из базиса всех искусственных переменных процесс отыскания оптимального плана продолжают с использованием первой строки целевой функции.

Пример 8. Решить с использованием искусственного базиса задачу линейного программирования

$$z = 6x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Сведем задачу к каноническому виду. Получим

$$z = 6x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 = 12, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1;4}). \end{cases}$$

Первое ограничение имеет предпочтительную переменную x_3, а второе — нет. Поэтому вводим в него искусственную переменную w_1. Приходим к M-задаче

$$z = 6x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - M \cdot w_1 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 + w_1 = 12, \\ x_j \ge 0 \ (j = \overline{1;4}),\ w_1 \ge 0. \end{cases}$$

Занесем условие M-задачи в симплексную табл. 18. Начальный опорный план имеет вид $x_0 = (x_1; x_2; x_3; x_4; w_1) = (0; 0; 2; 0; 12)$, $z(x_0) = = 0 - 12M$.

Сделаем необходимые пояснения.

Индексную строку удобно разбить на две. В первой из них записываются свободные члены выражений $\Delta_0 = c_Б \cdot A_0$ и $\Delta_j = c_Б \cdot A_j - c_j$, а во второй — коэффициенты, содержащие M. Например, для табл. 18:

$$\Delta_0 = 0 \cdot 2 + (-M) \cdot 12 = 0 - 12M,$$
$$\Delta_1 = 0 \cdot 2 + (-M) \cdot 3 - 6 = -6 - 3M,$$
$$\Delta_2 = 0 \cdot 1 + (-M) \cdot 4 - 4 = -4 - 4M, \ \ldots$$

Таблица 18

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	
			6	4	0	0	$-M$	
x_3	0	2	2	(1)	1	0	0	←
w_1	$-M$	12	3	4	0	-1	1	
$z_j - c_j$		0	-6	-4	0	0	0	
		$-12M$	$-3M$	$-4M$	0	M	0	
				↑				

Признак оптимальности проверяем сначала по второй строке индексной строки. Так как в ней существуют отрицательные оценки, то план x_0 не является оптимальным.

Переходим к новой табл. 19.

Разрешающий столбец находим по max $\{|-3M|;\ |-4M|\} = 4M$, разрешающая строка определяется по $\min\left\{\frac{2}{1};\ \frac{12}{4}\right\} = \frac{2}{1} = 2$. Следовательно, 1 — разрешающий элемент.

Таблица 19

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1
			6	4	0	0	$-M$
x_2	4	2	2	1	1	0	0
w_1	$-M$	4	-5	0	-4	-1	1
$z_j - c_j$		8	2	0	4	0	0
		$-4M$	$5M$	0	$4M$	M	0

В индексной строке нет отрицательных оценок. Следовательно, по признаку оптимальности опорный план (0; 2; 0; 0; 4) оптимален. Но так как в оптимальном плане искусственная переменная w_1 не равна 0, то по теореме 6 система ограничений исходной задачи несовместна. Задача решения не имеет.

Ответ: нет решения.

Пример 9. Решить с использованием искусственного базиса задачу

$$z = x_1 - x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + 3x_2 \le -3, \\ 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Упорядочим запись исходной задачи. Умножим второе неравенство на –1:

$$z = x_1 - x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \le 10, \\ x_1 - 3x_2 \ge 3, \\ 3x_1 + \ \ x_2 \ge 9, \\ -x_1 + \ \ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Сведем задачу к каноническому виду. Получим следующее:

$$z = x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + \ \ x_2 - x_5 = 9, \\ -x_1 + \ \ x_2 + x_6 = 4, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1;6}). \end{cases}$$

Первое и четвертое ограничения имеют предпочтительные переменные, а второе и третье — нет. Поэтому вводим в них искусственные переменные w_1 и w_2. Приходим к M-задаче:

$$z = x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + M \cdot w_1 + M \cdot w_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 + w_1 = 3, \\ 3x_1 + \ \ x_2 - x_5 + w_2 = 9, \\ -x_1 + \ \ x_2 + x_6 = 4, \\ x_j \ge 0\,(j = \overline{1;6}), w_1 \ge 0, w_2 \ge 0. \end{cases}$$

Занесем условие M-задачи в симплексную табл. 20. Начальный опорный план имеет вид $x_0 = (0;\ 0;\ 10;\ 0;\ 0;\ 4;\ 3;\ 9)$, $z(x_0) = 0 + 12M$.

Таблица 20

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w_1	w_2	
			1	–1	0	0	0	0	M	M	
x_3	0	10	1	1	1	0	0	0	0	0	
w_1	M	3	(1)	–3	0	–1	0	0	1	0	←
w_2	M	9	3	1	0	0	–1	0	0	1	
x_6	0	4	–1	1	0	0	0	1	0	0	
$z_j - c_j$		0	–1	1	0	0	0	0	0	0	
		12M	4M	–2M	0	–M	–M	0	0	0	
			↑								

Мы решаем задачу на минимум. Признак оптимальности проверяем сначала по второй строке индексной строки. Так как в ней существует положительная оценка, то план x_0 не является оптимальным. Переходим к новой табл. 21.

По мере вывода из базиса искусственных переменных соответствующие им столбцы можно опускать. Разрешающий столбец находим по $\max\{4M\} = 4M$, разрешающая строка определяется по $\min\left\{\frac{10}{1}; \frac{3}{1}; \frac{9}{3}\right\} = 3$. Следовательно, 1 — разрешающий элемент.

Таблица 21

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w_2	
			1	–1	0	0	0	0	M	
x_3	0	7	0	4	1	1	0	0	0	
x_1	1	3	1	–3	0	–1	0	0	0	
w_2	M	0	0	(10)	0	3	–1	0	1	←
x_6	0	7	0	–2	0	–1	0	1	0	
$z_j - c_j$		3	0	–2	0	–1	0	0	0	
		0	0	10M	0	3M	–M	0	0	
				↑						

Так как существуют положительные оценки, то план x_1 = (3; 0; 7; 0; 0; 7; 0; 0) не является оптимальным.

Переходим к табл. 22. Разрешающий столбец находим по $\max\{10M;\ 3M\} = 10M$, разрешающая строка определяется по $\min\left\{\frac{7}{4}; \frac{0}{10}\right\} = \frac{0}{10} = 0$.

Итак, 10 — разрешающий элемент.

Таблица 22

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1	–1	0	0	0	0
x_3	0	7	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
x_1	1	3	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	0
x_2	–1	0	0	1	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0
x_6	0	7	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1
$z_j - c_j$		3	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0

Так как все оценки неположительны, то получен оптимальный план. Итак, $x^* = x_{опт} = (3;\ 0;\ 7;\ 0;\ 0;\ 7)$, $z_{\min} = (x^*) = 3$.

Ответ: $x_{опт} = (3;\ 0;\ 7;\ 0;\ 0;\ 7)$, $z_{\min} = 3$.

4. Двойственные задачи в линейном программировании

4.1. Понятие двойственности. Построение пары взаимно двойственных задач

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется *двойственной*.

Первоначальная задача называется *прямой* или *исходной*. Многие задачи линейного программирования первоначально ставятся в виде исходных или двойственных задач, поэтому говорят о паре взаимно двойственных задач линейного программирования.

Связь исходной и двойственной задач заключается, в частности, в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой при определении симплексным методом оптимального плана.

В табл. 23 показана *пара симметричных двойственных задач* линейного программирования.

Таблица 23

Прямая задача	Двойственная задача
$z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$ $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i=\overline{1;m}); \\ x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1;n}) \end{cases}$	$f=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min;$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j \quad (j=\overline{1;n}); \\ y_i \ge 0 \quad (i=\overline{1;m}) \end{cases}$

Для построения двойственной задачи необходимо пользоваться следующими *правилами*:

1. Если прямая задача решается на максимум, то двойственная — на минимум, и наоборот.
2. В задаче на максимум ограничения-неравенства имеют смысл ≤, а в задаче минимизации — смысл ≥.
3. Коэффициенты c_j целевой функции прямой задачи являются свободными членами ограничений двойственной задачи.
4. Свободные члены b_i ограничений прямой задачи являются коэффициентами при соответствующих переменных целевой функции двойственной.
5. Матрица системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы системы ограничений исходной задачи транспонированием.
6. Если на переменную прямой задачи наложено условие неотрицательности, то соответствующее ограничение двойственной задачи записывается как ограничение-неравенство, если же нет, то как ограничение-равенство.
7. Если какое-либо ограничение прямой задачи записано как равенство, то на соответствующую переменную двойственной задачи условие неотрицательности не налагается.
8. Число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной, а число ограничений двойственной — числу переменных прямой задачи.

Пример 10. Построить двойственную задачу к каждой из исходных:

1) $z=3x_1+7x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} -2x_1+5x_2 \ge 15, \\ x_1+x_2 \ge 9, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2) $z = -4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \qquad\quad + x_4 \geq 3, \\ 8x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 \qquad\quad + 4x_4 \geq -4, \\ x_1 \qquad\quad + x_3 + 6x_4 \geq 5, \\ -x_1 + x_2 \qquad\quad - 2x_4 = -2, \\ x_1 \geq 0,\ x_4 \geq 0, \\ x_2,\ x_3 \text{ — любого знака.} \end{cases}$$

Решение. 1) Для данной задачи в *симметричной форме* получим двойственную, пользуясь приведенными правилами:

$$f = 15y_1 + 9y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \leq 3, \\ 5y_1 + y_2 \leq 7, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Данная задача записана в произвольной *несимметричной форме*. Прежде всего, ограничения типа $\geq$ умножением на –1 сведем к ограничениям типа $\leq$. Получим

$$z = -4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \qquad\quad - x_4 \leq -3, \\ 8x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 7, \\ -4x_1 + 3x_2 \qquad\quad - 4x_4 \leq 4, \\ -x_1 \qquad\quad - x_3 - 6x_4 \leq -5, \\ -x_1 + x_2 \qquad\quad - 2x_4 = -2, \\ x_1 \geq 0,\ x_4 \geq 0, \\ x_2,\ x_3 \text{ — любого знака.} \end{cases}$$

В результате применения указанных правил получим следующую модель двойственной задачи:

$$f = -3y_1 + 7y_2 + 4y_3 - 5y_4 - 2y_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} -2y_1 + 8y_2 - 4y_3 - y_4 - y_5 \geq -4, \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 \qquad\quad + y_5 = 2, \\ 3y_2 \qquad\quad - y_4 \qquad\quad = -7, \\ -y_1 + 5y_2 - 4y_3 - 6y_4 - 2y_5 \geq 5, \\ y_1 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0, \\ y_2,\ y_5 \text{ — любого знака.} \end{cases}$$

4.2. Теоремы двойственности. Критерий оптимальности Канторовича (*достаточный признак оптимальности*)

Если для некоторых допустимых планов x^* и y^* пары двойственных задач выполняется равенство

$$z(x^*) = f(y^*),$$

то x^* и y^* являются *оптимальными планами* соответствующих задач.

Теорема 7 (***о существовании оптимальных планов пары двойственных задач***). Для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существования допустимого плана для каждой из них.

Согласно теории линейного программирования каждой задаче линейного программирования соответствует двойственная ей. Основные утверждения о взаимодвойственных задачах содержатся в нижеприведенных теоремах.

Первая теорема двойственности. Для взаимодвойственных задач линейного программирования имеет место один из взаимоисключающих случаев:

1. В прямой и двойственной задачах имеются оптимальные решения, при этом значения целевых функций в оптимальных решениях совпадают:

$$z_{\max} = f_{\min}.$$

2. В прямой задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двойственной задачи будет пустое допустимое множество.

3. В двойственной задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена снизу. При этом у прямой задачи допустимое множество оказывается пустым.

4. Обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества.

Вторая теорема двойственности (***теорема о дополняющей нежесткости***). Для того, чтобы планы $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$x_j^* \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0 \quad (j = \overline{1;n}), \qquad (7)$$

$$y_i^* \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0 \quad (i = \overline{1;m}) . \qquad (8)$$

Условия (7), (8) называются *условиями дополняющей нежесткости*. Из них следует, что если какое-либо неравенство системы ограничений одной из задач не обращается в строгое равенство оптимальным планом этой задачи, то соответствующая компонента оптимального плана двойственной задачи должна равняться нулю; если же какая-либо компонента оптимального плана одной из задач положительна, то соответствующее ограничение в двойственной задаче ее оптимальным планом должно обращаться в строгое равенство.

Таким образом, если $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$, то $y_i^* = 0 \ (i = \overline{1;m})$;

$$\text{если } y_i^* > 0 \text{, то } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \ \ (i = \overline{1;m}) .$$

Точно так же, если $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j \ \ (j = \overline{1;n})$, то $x_j^* = 0$;

$$\text{если } x_j^* > 0 \text{, то } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \ \ (j = \overline{1;n}) .$$

Эта теорема справедлива для задач симметричной двойственной пары. Для задач в канонической и общей форме она справедлива только при ограничениях, имеющих вид неравенств, и при неотрицательности переменных. Она позволяет определить оптимальное решение одной из пары задач по решению другой.

Для этого достаточно воспользоваться соответствием переменных прямой и двойственной задач и оценок в последней симплексной таблице:

x_1	x_2	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+i}	$\dots$	x_{n+m}
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\dots$	$\updownarrow$	$\dots$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\dots$	$\updownarrow$	$\dots$	$\updownarrow$
y_{m+1}	y_{m+2}	$\dots$	y_{m+j}	$\dots$	y_{m+n}	y_1	y_2	$\dots$	y_i	$\dots$	y_m
Δ_1^*	Δ_2^*	$\dots$	Δ_j^*	$\dots$	Δ_n^*	Δ_{n+1}^*	Δ_{n+2}^*	$\dots$	Δ_{n+i}^*	$\dots$	Δ_{n+m}^*

Отсюда имеем оптимальный план двойственной задачи. Если прямая задача решается на *максимум*, то $y_1^* = \Delta_{n+1}^*$, $y_2^* = \Delta_{n+2}^*, \ldots,$ $y_i^* = \Delta_{n+i}^*, \ldots, y_m^* = \Delta_{n+m}^*, y_{m+1}^* = \Delta_1^*, y_{m+2}^* = \Delta_2^*, \ldots, y_{m+j}^* = \Delta_j^*, \ldots, y_{m+n}^* = \Delta_n^*$.

Если прямая задача решается на *минимум*, тогда $y_i^* = -\Delta_{n+i}^* \; (i = \overline{1;m})$, $y_{m+j}^* = -\Delta_j^* \; (j = \overline{1;n})$

Пример 11. Для исходной задачи построить двойственную и решить ее симплексным методом. Записать решение исходной и двойственной задач:

$$z = 15x_1 + 30x_2 + 5x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + x_3 \ge 2, \\ 3x_1 + \;\; 3x_2 \qquad\;\; \ge 5, \\ x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1;3}). \end{cases}$$

Решение. Двойственная задача будет иметь две переменные y_1 и y_2, так как исходная задача содержит два ограничения. Используя общее правило записи двойственной задачи, получим

$$f = 2y_1 + 5y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \le 15, \\ 10y_1 + 3y_2 \le 30, \\ y_1 \le 5, \\ y_i \ge 0 \;\; (i = \overline{1;2}). \end{cases}$$

Решим двойственную задачу симплексным методом.

Рассмотрим второй случай построения начального опорного плана. Сведем задачу к каноническому виду. Для этого добавим к левым частям неравенств дополнительные переменные y_3, y_4, y_5, которые в целевую функцию вводятся с коэффициентами, равными нулю.

Итак, задача примет следующий вид:

$$f = 2y_1 + 5y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 + y_3 = 15, \\ 10y_1 + 3y_2 + y_4 = 30, \\ y_1 \qquad\qquad + y_5 = 5, \\ y_i \ge 0 \;\; (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

Система имеет предпочтительный вид. Предпочтительные переменные y_3, y_4, y_5 — базисные, а y_1, y_2 — свободные. Свободные переменные приравниваются к нулю, а базисные — к свободным членам.

Следовательно, начальный опорный план примет следующий вид:

$$x_0 = (0;\ 0;\ 15;\ 30;\ 5).$$

При этом $f(x_0) = 0$.

Составим симплексную табл. 24.

Таблица 24

БП	$c_Б$	A_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
			2	5	0	0	0
y_3	0	15	5	(3)	1	0	0 ←
y_4	0	30	10	3	0	1	0
y_5	0	5	1	0	0	0	1
$f_j - c_j$		0	–2	–5 ↑	0	0	0

Так как в индексной строке (f-строке) существуют отрицательные оценки, то план x_0 не оптимален.

От табл. 24 нужно перейти к следующей. Переход осуществляем следующим образом: разрешающий столбец находим по $\max\{|-2|;\ |-5|\} = 5$, разрешающая строка определяется по

$$\min\left\{\frac{15}{3};\ \frac{30}{3}\right\} = \frac{15}{3} = 5.$$

На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится разрешающий элемент 3.

Теперь составим табл. 25. Вместо y_3 в базис вводим y_2. На месте разрешающего элемента пишем 1, все остальные элементы разрешающего столбца равны нулю. Элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент. Все остальные элементы табл. 25 вычисляются по правилу прямоугольника.

Таблица 25

БП	$c_Б$	A_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
			2	5	0	0	0
y_2	5	5	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0
y_4	0	15	5	0	–1	1	0
y_5	0	5	1	0	0	0	1
$f_j - c_j$		25	$\frac{19}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	0

В индексной строке табл. 25 нет отрицательных оценок. Следовательно, получен оптимальный план

$$y^* = y_{опт} = (0;\ 5;\ 0;\ 15;\ 5),\ \ f_{\max}(y^*) = 25.$$

Итак, двойственная задача решена. По *первой теореме двойственности* воспользуемся соответствием переменных прямой и двойственной задач и оценок в симплексной таблице:

$$\begin{array}{cc|ccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ x_4 & x_5 & x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

Имеем $x^* = \left(\dfrac{5}{3};\ 0;\ 0;\ \dfrac{19}{3};\ 0\right),\ z_{\min}(x^*) = 25$.

Итак, решение исходной задачи найдено.

Ответ: $x^* = \left(\dfrac{5}{3};\ 0;\ 0;\ \dfrac{19}{3};\ 0\right),\ z_{\min}(x^*) = 25$;

$$y^* = (0;\ 5;\ 0;\ 15;\ 5),\ f_{\max}(y^*) = 25.$$

5. Транспортная задача

5.1. Постановка транспортной задачи по критерию стоимости в матричной форме

Многие прикладные модели в экономике сводятся к задачам линейного программирования. Практически все задачи линейного программирования можно решить, используя ту или иную модификацию симплексного метода. Однако существуют более эффективные вычислительные процедуры решения некоторых типов задач линейного программирования, основанные на специфике ограничений этих задач. Рассмотрим так называемую *транспортную задачу* (*ТЗ*) *по критерию стоимости,* которую можно сформулировать нижеуказанным образом.

В m пунктах отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$, которые в дальнейшем будем называть *поставщиками*, сосредоточено определенное количество единиц некоторого однородного продукта, которое обозначим $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Данный продукт потребляется в n пунктах $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые будем называть *потребителями*; объем потребления обозначим b_1, b_2, …, b_n. Известны *расходы* (*транспортные издержки*) на перевозку единицы продукта из пункта A_i (i = 1, 2, …, m) в пункт B_j (j = 1, 2, …, n), которые равны c_{ij} и приведены в *матрице транспортных расходов* (*издержек*) $C = (c_{ij})$.

Требуется составить план перевозок, при котором весь продукт вывозится из пунктов A_i в пункты B_j в соответствии с потребностью и общая величина транспортных расходов (издержек) будет минимальной.

Обозначим количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j, через x_{ij}. Предполагается, что все $x_{ij} \geq 0$. Совокупность всех переменных x_{ij} для краткости обозначим X.

В *математической форме* задача линейного программирования имеет следующий вид:

$$f(X) = z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min\ ; \tag{9}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1;n}), \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1;m}), \qquad (10) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1;m};\ j = \overline{1;n}). \qquad (11) \end{cases}$$

При этом (9) — целевая функция, (10) — ограничения по потребностям и запасам, (11) — условие неотрицательности.

Стоимость всех перевозок выражается линейной функцией (9). Условия (10) означают полное удовлетворение спроса во всех пунктах потребления и определяют полный вывоз продукции от всех поставщиков.

Для наглядности условие ТЗ можно представить таблицей, которую будем называть *распределительной*. Распределительную таблицу называют иногда *табличной* или *матричной моделью ТЗ* (*матрицей планирования*).

Матрицу $X = (x_{ij})_{m \times n}$ будем называть *матрицей перевозок*, матрицу $C = (c_{ij})_{m \times n}$ — *матрицей тарифов*, а число c_{ij} — *тарифом клетки* (i, j).

Таблица 26

Потребители, B_j / Поставщики, A_i	B_1	B_2	…	B_n	Запасы, a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности, b_j	b_1	b_2	…	b_n	

Будем называть план перевозок $X = (x_{ij})_{m\times n}$ *допустимым*, если он удовлетворяет ограничениям (10).

Допустимый план перевозок, доставляющий минимум целевой функции (9), называется *оптимальным.*

***Теорема 8* (*о существовании допустимого плана*)**. Для того, чтобы ТЗ имела допустимые планы, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{12}$$

(*сумма запасов продукта равна сумме спроса на него*).

Условие (12) является *условием баланса*.

5.2. Закрытая и открытая модели транспортной задачи

Транспортная задача, в которой имеет место равенство (12), называется *закрытой.*

Если для ТЗ выполняется одно из условий:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{13}$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \ , \tag{14}$$

то задачу называют *открытой.*

Для разрешимости ТЗ с открытой моделью необходимо преобразовать ее в закрытую.

Если суммарный запас продукта превышает общий спрос, т. е. выполняется условие (13), то в рассмотрение вводится *фиктивный* ($n + 1$)-й *пункт потребления* B_{n+1} (в матрице задачи предусматривается дополнительный столбец) со спросом, равным небалансу, т. е. $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, и одинаковыми тарифами, полагаемыми обычно равными нулю. Теперь условие разрешимости выполняется, а величина целевой функции остается прежней, поскольку цены на дополнительные перевозки равны нулю. При этом грузы, которые должны быть перевезены в пункт B_{n+1}, фактически останутся в пункте отправления.

Если же общий спрос потребителей больше суммарного запаса продукта, т. е. выполняется условие (14), то вводится *фиктивный* ($m + 1$)-й *пункт отправления* A_{m+1} (в матрице задачи предусматривается дополнительная строка) с запасом продукта $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Тарифы на доставку продукта фиктивным поставщиком предполагаются, как и в предыдущем случае, равными нулю, что не отразится на целевой функции.

***Теорема 9* (*о ранге матрицы*).** Ранг матрицы A (матрица системы ограничений (10)) транспортной задачи на единицу меньше числа уравнений: $r(A) = m + n - 1$.

5.3. Построение исходного опорного плана

Решение ТЗ начинается с построения первоначального (опорного) плана. Построение опорного плана, а также преобразование его будем производить непосредственно в распределительной таблице.

Система ограничительных уравнений содержит $m \cdot n$ переменных и $m + n$ уравнений.

Из теоремы 9 следует, что каждый опорный план задачи имеет $m + n - 1$ базисных переменных (число занятых опорным планом клеток) и $m \cdot n - (m + n - 1)$ свободных переменных, равных нулю (число свободных клеток).

Рассмотрим способы (правила) построения начального опорного плана. Составить опорный план можно различными способами. Однако для всех способов непременным является требование, чтобы в процессе заполнения распределительной таблицы в каждую загружаемую клетку вписывалась максимально возможная по величине поставка. В таком случае каждый раз либо будет исчерпываться весь запас груза у поставщика (мы будем говорить о том, что «закрывается строка»), либо будет полностью удовлетворяться спрос потребителя («закрывается столбец»). Соблюдение этого требования обеспечит заполнение именно $m + n - 1$ клеток.

Клетки, в которых стоят отличные от нуля x_{ij}, называют *загруженными*, остальные — *свободными.*

План, содержащий $m + n - 1$ загруженную клетку, называется *невырожденным.* Если число занятых клеток будет меньше, чем $m + n - 1$, то построенный план *вырожден.*

Правило «северо-западного угла». Первой загружается клетка (1; 1), условно называемая *северо-западной*. Если закрывается строка, то следующей загружается клетка (2; 1); если же закрывается столбец, то следующей загружается клетка (1; 2). Итак, каждый раз загружается клетка, соседняя либо по строке, либо по столбцу (в зависимости от конкретных данных задачи), до тех пор, пока не исчерпаются ресурсы. Последней будет загружена клетка (m; n). В результате загруженные клетки расположатся вдоль диагонали (1; 1)–(m; n), поэтому способ «северо-западного угла» называют еще *диагональным способом.*

Существенным недостатком способа «северо-западного угла» является игнорирование при загрузке клеток тарифов c_{ij}, поэтому построенный опорный план обычно оказывается весьма далеким от оптимального.

Правило «минимального элемента» («минимальной стоимости»). В первую очередь заполняется клетка с минимальным значением тарифа. При этом в клетку записывается максимально возможное значение поставки. Затем из рассмотрения исключают строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. После этого из оставшихся клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшим тарифом. Процесс распределения заканчивается, когда все запасы поставщиков исчерпаны, а спрос потребителей полностью удовлетворен. В результате получаем опорный план, который должен содержать $m + n - 1$ загруженных клеток. В процессе заполнения таблицы могут быть одновременно исключены строка и столбец. Так бывает, когда полностью исчерпывается запас груза и полностью удовлетворяется спрос. В этом случае и в случае вырожденного плана в свободные клетки надо записать число 0 — «нуль-загрузку» («базисный» нуль), условно считая такую клетку занятой (обычно клетки, которым соответствует наименьший тариф).

Однако число 0 записывается в те свободные клетки, которые не образуют циклов с ранее занятыми клетками.

Циклом называется набор клеток матрицы планирования, в котором две и только две соседние клетки расположены в одном столбце или в одной строке, причем последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая. (О циклах более подробно будет сказано далее.)

Поскольку при заполнении таблицы учитываются величины тарифов, то, как правило, построенный план оказывается ближе к оптимальному, нежели построенный способом «северо-западного угла».

После нахождения первоначального невырожденного ациклично-го (в матрице планирования нельзя построить цикл, все вершины которого расположены в загруженных клетках) плана необходимо исследовать его на оптимальность, и если он не оптимален, то перейти к улучшенному плану. Одним из методов такого исследования является *метод потенциалов.*

Теорема 10 (теорема о потенциалах). Если план $x^* = (x_{ij}^*)_{m\times n}$ ТЗ является оптимальным, то ему соответствует система из $m+n$ чисел u_i^*, v_j^*, удовлетворяющих условиям $u_i^* + v_j^* = c_{ij}$ для $x_{ij}^* > 0$ и $u_i^* + v_j^* \le c_{ij}$ для $x_{ij}^* = 0$ $(i = \overline{1;m};\ j = \overline{1;n})$.

Числа u_i^*, v_j^* называются *потенциалами* соответственно i*-го поставщика* и j*-го потребителя*.

На теореме 10 основан метод решения ТЗ, названный *методом потенциалов*.

5.4. Метод потенциалов

Сущность этого метода состоит в следующем. После того, как найден первоначальный невырожденный план перевозок, каждому поставщику A_i (каждой строке) ставится в соответствие некоторое число $u_i\,(i = \overline{1;\mathrm{m}})$, а каждому потребителю B_j (каждому столбцу) — некоторое число $v_j\,(j = \overline{1;n})$. Числа u_i, v_j — *потенциалы* A_i и B_j (u_i, v_j — произвольного знака).

Согласно теореме о потенциалах, числа u_i и v_j выбирают так, чтобы в любой загруженной клетке их сумма равнялась тарифу этой клетки, т. е.

$$u_i + v_j = c_{ij} . \tag{15}$$

Так как всех занятых клеток должно быть $m + n - 1$, а чисел u_i и v_j — $m + n$, то для нахождения потенциалов u_i, v_j получаем систему из $m + n - 1$ уравнений (15) с $m + n$ неизвестными. В этой системе уравнений на одно меньше, чем неизвестных, поэтому один потенциал можно задать произвольно, например равным нулю. Тогда остальные потенциалы определяются однозначно.

При проверке *оптимальности плана* для каждой свободной клетки вычисляют разность между тарифом клетки и суммой потенциалов соответствующих строки и столбца:

$$S_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) . \tag{16}$$

При этом S_{ij} — оценка свободной клетки.

Если для всех свободных клеток оценки $S_{ij} \geq 0$, то опорный план перевозок является *оптимальным.*

Если хотя бы для одной из клеток $S_{ij} < 0$, то план *не оптимален*, и нужно переходить к новому плану.

5.5. Переход к новому плану

Порядок перехода к новому плану следующий:

1. Клетка, для которой значение S_{ij} минимально, является *перспективной* и подлежит загрузке. Если таких клеток несколько, то берем любую.

2. Для выбранной перспективной клетки строим *цикл*, т. е. составляем замкнутый контур, по которому следует перераспределить груз. Цикл строится лишь для свободной клетки. Если из занятых клеток образуется цикл, то план перевозок не является опорным. Контур представляет собой замкнутую ломаную линию, состоящую из горизонтальных и вертикальных направленных отрезков (пересекаются под прямым углом), соединяющих середины клеток, из которых одна (именно перспективная) свободна, а все остальные — загружены. В цикле всегда четное число клеток. Для каждой свободной клетки такой контур существует и является единственным. Точка, в которой меняется направление контура (горизонтальное на вертикальное или наоборот), называется *вершиной цикла.* В одной строке или одном столбце могут находиться две и только две вершины.

Точки самопересечения контура вершинами не являются.

Некоторые примеры циклов приведены на рис. 8.

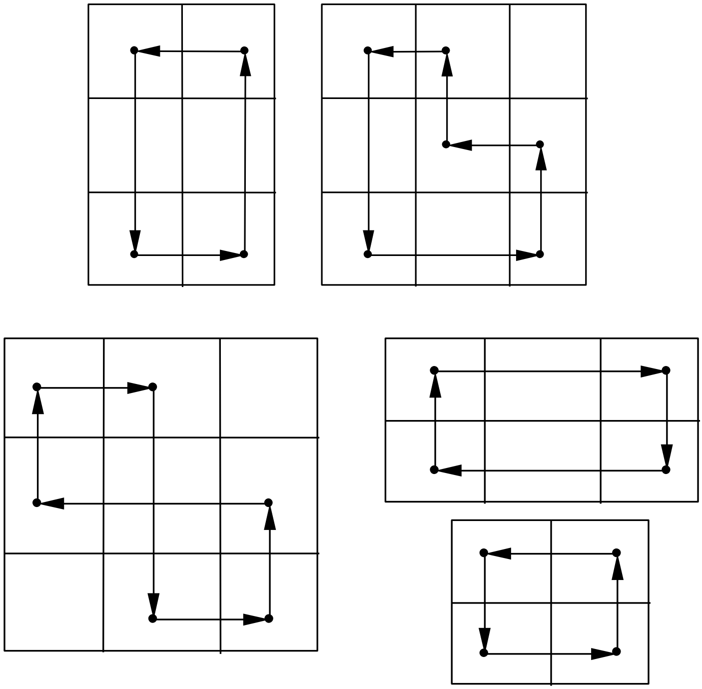


Рис. 8

3. Расставим поочередно знаки «+» и «–» в вершинах цикла. В перспективной клетке ставим знак «+», затем, двигаясь по вершинам цикла, ставим поочередно знаки «–» и «+», пока не придем к исходной вершине.

4. В клетках, соответствующих «отрицательным» вершинам, отыскивается наименьший груз (обозначим его θ), который «перемещается» по клеткам цикла, т. е. прибавляется к поставкам x_{ij} в клетках со знаком «+» (включая свободную) и вычитается в клетках со знаком «–».

В итоге получаем новый невырожденный план, для которого составляем новую систему потенциалов и проверяем план на оптимальность.

Процесс продолжается, пока не получится оптимальный план перевозок. В результате остается подсчитать минимальные расходы ($z_{\min}$).

Примечание. Если все $S_{ij} > 0$, то полученный *оптимальный план единственный.* В случае, если хотя бы одна оценка $S_{ij} = 0$, имеем *бесчисленное множество оптимальных планов* с одним и тем же значением целевой функции.

5.6. Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Приведем *алгоритм метода потенциалов*:

1. Условия задачи записывают в форме распределительной таблицы.
2. Сравнивают общий запас продукта с суммарным спросом и в случае нарушения равенства (12) вводят фиктивного поставщика (потребителя).
3. Строят начальный опорный план по одному из правил.
4. Вычисляют потенциалы поставщиков и потребителей u_i и v_j $(i = \overline{1;m};\ j = \overline{1;n})$, решив систему уравнений типа (15).
5. Вычисляют оценки S_{ij} для всех свободных клеток по формуле (16). Если оценки всех свободных клеток неотрицательны, то исследуемый план является оптимальным, и остается подсчитать транспортные расходы. Если же среди оценок есть отрицательные, то выбирают клетку с наименьшей отрицательной оценкой и переходят к следующему пункту алгоритма.
6. Загружают выделенную в предыдущем пункте свободную клетку (пункт 5.5), получают новый опорный план и возвращаются к пункту 4 алгоритма.

Пример 12. Решить транспортную задачу, условие которой дано в табл. 27.

Таблица 27

Потребители, B_j / Поставщики, A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы, a_i
A_1	5	4	1	2	60
A_2	4	2	6	3	40
A_3	7	3	5	4	35
Потребности, b_j	40	25	20	50	

Решение. Установим характер задачи.

Сравнивая $\sum_{i=1}^{3} a_i = 60 + 40 + 35 = 135$ и $\sum_{j=1}^{4} b_j = 40 + 25 + 20 + 50 = 135$, заключаем, что условие баланса выполняется и данная ТЗ обладает *закрытой моделью*.

Покажем, как составляется первоначальный план по правилу «северо-западного угла» и правилу «минимальной стоимости».

По правилу «северо-западного угла» первоначальный план имеет вид табл. 28.

Таблица 28

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5 40	4 20	1	2	60
A_2	4	2 5	6 20	3 15	40
A_3	7	3	5	4 35	35
b_j	40	25	20	50	

В клетку первой строки и первого столбца, т. е. (1; 1), завозим груз x_{11} в количестве $x_{11} = \min\{b_1;\ a_1\} = \min\{40;\ 60\} = 40$. Потребности потребителя B_1 удовлетворены. Так как у первого поставщика остались запасы в количестве $a_1 - b_1 = 60 - 40 = 20$, то переходим к заполнению второй клетки первой строки, т. е. (1; 2). В эту клетку завезем груз x_{12} в количестве $x_{12} = \min\{b_2;\ a_1 - b_1\} = \min\{25;\ 20\} = 20$. Весь груз из первого пункта вывезен, поэтому переходим ко второй строке. Так как потребности B_2 не удовлетворены, то в клетку (2; 2) завозим груз x_{22} в количестве $x_{22} = \min\{5;\ 40\} = 5$. Потребности B_2 удовлетворены, но груз из A_2 не вывезен полностью, поэтому завозим груз в клетку (2; 3) в количестве $x_{23} = \min\{20;\ 35\} = 20$. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет вывезен весь груз из пунктов A_1, A_2, A_3 и не будут удовлетворены все потребности B_1, B_2, B_3, B_4.

В результате получаем матрицу перевозок

$$X_1 = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 20 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}.$$

Полученный первоначальный план X_1 является невырожденным, так как число загруженных клеток $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Общая стоимость перевозки грузов по этому плану —

$$z_1 = 5 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 20 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 35 = 595.$$

Построим первоначальный план этой задачи *по правилу «минимальной стоимости»* (табл. 29).

Таблица 29

Потребители, B_j / Поставщики, A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы, a_i
A_1	5	4	1 20	2 40	60
A_2	4 5	2 25	6	3 10	40
A_3	7 35	3	5	4	35
Потребности, b_j	40	25	20	50	

Выбираем в таблице наименьший тариф. Он равен единице. Ему соответствует клетка (1; 3). В эту клетку помещаем груз в количестве $\min\{20; 60\} = 20$ и исключаем из рассмотрения третий столбец. В оставшейся таблице наименьший тариф равен двум. Ему соответствуют клетки (1; 4) и (2; 2). Выбираем любую, например (1; 4), помещаем в нее груз в количестве $\min\{50; 60 - 20\} = 40$ и исключаем из рассмотрения первую строку. В оставшейся таблице опять выбираем наименьший тариф и продолжаем процесс до тех пор, пока все запасы не будут распределены, а потребности — удовлетворены. В результате получаем матрицу перевозок

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 5 & 25 & 0 & 10 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

План X_2 является невырожденным $(m + n - 1 = 6)$.

Общая стоимость перевозки грузов по этому плану —

$$z_2 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 35 = 445.$$

Решим задачу *методом потенциалов*, исходя из плана, построенного по способу «минимальной стоимости» (так как $z_2 < z_1$). (Отметим, что план X_2 — невырожден и ацикличен.) Каждому поставщику поставим в соответствие числа $u_i (i = \overline{1;3})$, а каждому потребителю — числа $v_j (j = \overline{1;4})$.

По занятым клеткам составляем систему уравнений (15) для определения потенциалов u_i и v_j:

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 1, \\ u_1 + v_4 = 2, \\ u_2 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_2 + v_4 = 3, \\ u_3 + v_1 = 7. \end{cases}$$

Положим, что $u_1 = 0$, тогда $v_3 = 1$, $v_4 = 2$, $u_2 = 1$, $v_1 = 3$, $v_2 = 1$, $u_3 = 4$.

Потенциалы проставлены на рис. 9. Их можно вычислять и непосредственно, не выписывая систему уравнений. Ведь если известны потенциал и тариф занятой клетки, то из соотношения $u_i + v_j = c_{ij}$ легко определить неизвестный потенциал ($u_i = c_{ij} - v_j$ или $v_j = c_{ij} - u_i$).

	40	25	20	50	
60	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
40	4 5 +	2 25 –	6	3 10	$u_2 = 1$
35	7 35 –	3 +	5	4	$u_3 = 4$
	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	

Рис. 9

Проверяем условие оптимальности (16) для свободных клеток:

$S_{11} = 5 - (0 + 3) = 2 > 0$, $S_{32} = 3 - (4 + 1) = -2 < 0$,

$S_{12} = 4 - (0 + 1) = 3 > 0$, $S_{33} = 5 - (4 + 1) = 0$,

$S_{23} = 6 - (1 + 1) = 4 > 0$, $S_{34} = 4 - (4 + 2) = -2 < 0$,

Поскольку $S_{32} < 0$ и $S_{34} < 0$, то план является неоптимальным. Так как $S_{32} = S_{34}$, то объявим, например, клетку (3; 2) перспективной. Эту клетку необходимо заполнить (загрузить). Для клетки (3; 2) построим цикл (3; 2), (2; 2), (2; 1), (3; 1) (на рис. 9 цикл отмечен пунктиром). Проставим знаки «+» и «–» в цикле поочередно, начиная со свободной клетки. Наименьшее количество груза, стоящее в вершинах цикла с отрицательным знаком, $\theta_1 = \min\{25;\, 35\} = 25.$ Чтобы общий баланс цикла не изменился, необходимо в клетки цикла со знаком «+» прибавить 25 единиц груза, а из клеток со знаком «–» — вычесть столько же единиц.

Получим новый план перевозок. Для этого плана определяем новые потенциалы и оценки свободных клеток (рис. 10).

	40	25	20	50	
60	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
40	4 30 +	2	6	3 10 –	$u_2 = 1$
35	7 10 –	3 25	5	4 +	$u_3 = 4$
	$v_1 = 3$	$v_2 = -1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	

Рис. 10

Определяем потенциалы u_i и v_j из системы уравнений (15):

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 1, \\ u_1 + v_4 = 2, \\ u_2 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_4 = 3, \\ u_3 + v_1 = 7, \\ u_3 + v_2 = 3. \end{cases}$$

Положим, что $u_1 = 0$, тогда $v_3 = 1$, $v_4 = 2$, $u_2 = 1$, $v_1 = 3$, $u_3 = 4$, $v_2 = -1$.

Проверим условие оптимальности (16):

$S_{11} = 5 - (0 + 3) = 2 > 0,$ $S_{23} = 6 - (1 + 1) = 4 > 0,$

$S_{12} = 4 - (0 + (-1)) = 5 > 0,$ $S_{33} = 5 - (4 + 1) = 0,$

$S_{22} = 2 - (1 + (-1)) = 2 > 0,$ $S_{34} = 4 - (4 + 2) = -2 < 0.$

Так как $S_{34} < 0$, то план является неоптимальным. Строим цикл с вершиной в клетке (3; 4): (3; 4), (2; 4), (2; 1), (3; 1).

Определяем $\theta_2 = \min\{10;\, 10\} = 10.$ Следовательно, 10 единиц груза нужно добавить в клетки (3; 4) и (2; 1) и убрать из клеток (2; 4) и (3; 1), причем в клетке, например, (2; 4) оставляем «базисный» нуль, чтобы план был невырожденным. Получаем новый план перевозок (рис. 11).

	40	25	20	50	
60	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
40	4 40	2	6	3 0	$u_2 = 1$
35	7	3 25	5	4 10	$u_3 = 2$
	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	

Рис. 11

Определим потенциалы u_i и v_j из системы уравнений (15):

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 1, \\ u_1 + v_4 = 2, \\ u_2 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_4 = 3, \\ u_3 + v_2 = 3, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{cases}$$

Положим, что $u_1 = 0$, тогда $v_3 = 1$, $v_4 = 2$, $u_2 = 1$, $v_1 = 3$, $v_2 = 1$, $u_3 = 2$.

Проверяем условие оптимальности (16):

$S_{11} = 5 - (0 + 3) = 2 > 0$, $S_{23} = 6 - (1 + 1) = 4 > 0$,

$S_{12} = 4 - (0 + 1) = 3 > 0$, $S_{31} = 7 - (2 + 3) = 2 > 0$,

$S_{22} = 2 - (1 + 1) = 0$, $S_{33} = 5 - (2 + 1) = 2 > 0$.

Так как для всех свободных клеток выполнено условие $S_{ij} \geq 0$, то *план оптимален*. Поскольку среди оценок имеется оценка, равная нулю, то за счет загрузки клетки (2; 2) можно получить новый план, но значение целевой функции не изменится. Это случай *бесчисленного множества оптимальных планов*.

Итак, *матрица оптимальных перевозок* имеет следующий вид:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Этому плану соответствует минимальная стоимость перевозок:

$z_{\min} = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 10 = 375$(условных единиц).

Ответ:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \; z_{\min}(X^*) = 375 \text{ условных единиц.}$$

Пример 13. Решить транспортную задачу методом потенциалов, для которой известно следующее: a_i — запас груза i-го поставщика; b_j — потребность j-го потребителя; $C = (c_{ij})$ — матрица затрат на перевозку одной единицы груза:

$a_1 = 12$, $b_1 = 14$,
$a_2 = 3$, $b_2 = 10$,
$a_3 = 10$, $b_3 = 6$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поместим все данные задачи в табл. 30.

Таблица 30

a_i \ b_j	14	10	6
12	1	0	2
3	3	4	1
10	4	6	5

Проверим, сколько единиц однородного продукта содержат поставщики (12 + 3 + 10 = 25) и сколько единиц однородного продукта нужно доставить потребителям (14 + 10 + 6 = 30).

Так как 25 < 30, т. е. $\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{3} b_j$, то имеем *открытую модель* транспортной задачи.

Для разрешимости транспортной задачи с открытой моделью необходимо преобразовать ее в закрытую.

Поскольку общий спрос потребителей больше суммарного запаса продукта, то вводится фиктивный четвертый поставщик. В этом случае в таблице распределения строится дополнительная строка, для которой поставки равны разности между суммарной потребностью и фактическими запасами, т. е.

$$a_4 = \sum_{j=1}^{3} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 30 - 25 = 5.$$

Все тарифы на доставку продукта фиктивным поставщиком равны нулю: $c_{4j} = 0\ (j = \overline{1;3})$.

Имеем ТЗ *закрытого типа*, которую решаем методом потенциалов (табл. 31).

Таблица 31

a_i \ b_j	14	10	6
12	1	0	2
3	3	4	1
10	4	6	5
5	0	0	0

Построим первоначальный план (опорный) методом «минимального элемента» (табл. 32).

Таблица 32

a_i \ b_j	14	10	6
12	1 7	0 5	2
3	3	4	1 3
10	4 7	6	5 3
5	0	0 5	0

В результате получаем матрицу перевозок

$$X_1 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

План X_1 является невырожденным ($m + n - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$). Общая стоимость перевозки грузов по этому плану —

$$z_1 = 1 \cdot 7 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 0 \cdot 5 = 53.$$

Потенциалы поставщиков и потребителей определены непосредственно на рис. 12.

	14	10	6	
12	1 7 –	0 5 +	2	$u_1 = -3$
3	3	4	1 3	$u_2 = -4$
10	4 7 +	6	5 3 –	$u_3 = 0$
5	0	0 5 –	0 • +	$u_4 = -3$
	$v_1 = 4$	$v_2 = 3$	$v_3 = 5$	

Рис. 12

Оценки свободных клеток следующие:

$S_{13} = 2 - (-3 + 5) = 0,$ $S_{32} = 6 - (0 + 3) = 3 > 0,$

$S_{21} = 3 - (-4 + 4) = 3 > 0,$ $S_{41} = 0 - (-3 + 4) = -1 < 0,$

$S_{22} = 4 - (-4 + 3) = 5 > 0,$ $S_{43} = 0 - (-3 + 5) = -2 < 0.$

Так как $S_{41} < 0$ и $S_{43} < 0$, то план является неоптимальным. Наиболее потенциальной перспективной является клетка (4; 3). Строим для клетки (4; 3) цикл непосредственно на рис. 12. В цикл войдут клетки (4; 3), (3; 3), (3; 1), (1; 1), (1; 2), (4; 2). Проставим знаки «+» и «–» в цикле поочередно, начиная со свободной клетки. Наименьшее количество груза, стоящее в вершинах цикла с отрицательным знаком, $\theta_1 = \min\{3;\ 7;\ 5\} = 3$. В результате смещения θ по циклу получим новый план (рис. 13).

	14	10	6	
12	1 4 –	0 8 +	2	$u_1 = 0$
3	3	4	1 3	$u_2 = 1$
10	4 10	6	5	$u_3 = 3$
5	0 + •	0 2 –	0 3	$u_4 = 0$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 0$	$v_3 = 0$	

Рис. 13

Для этого плана определяем новые потенциалы и оценки свободных клеток:

$S_{13} = 2 - (0 + 0) = 2 > 0,$ $S_{32} = 6 - (3 + 0) = 3 > 0,$
$S_{21} = 3 - (1 + 1) = 1 > 0,$ $S_{33} = 5 - (3 + 0) = 2 > 0,$
$S_{22} = 4 - (1 + 0) = 3 > 0,$ $S_{41} = 0 - (0 + 1) = -1 < 0.$

Так как $S_{41} < 0$, то план является неоптимальным. Строим для клетки (4; 1) цикл непосредственно на рис. 13. В цикл войдут клетки (4; 1), (1; 1), (1; 2), (4; 2). Проставим знаки в цикле. В отрицательных вершинах построенного для клетки (4; 1) цикла наименьшее количество груза — $\theta_2 = \min\{4;\ 2\} = 2$.

После смещения по циклу 2 единиц груза получим новый план перевозок (рис. 14).

	14	10	6	
12	1 2	0 10	2	$u_1 = 0$
3	3	4	1 3	$u_2 = 0$
10	4 10	6	5	$u_3 = 3$
5	0 2	0	0 3	$u_4 = -1$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 0$	$v_3 = 1$	

Рис. 14

Как и для предыдущего плана перевозок, все потенциалы поставщиков и потребителей определены на рис. 14. Оценки свободных клеток:

$S_{13} = 2 - (0 + 1) = 1 > 0,$ $S_{32} = 6 - (3 + 0) = 3 > 0,$
$S_{21} = 3 - (0 + 1) = 2 > 0,$ $S_{33} = 5 - (3 + 1) = 1 > 0,$
$S_{22} = 4 - (0 + 0) = 4 > 0,$ $S_{42} = 0 - (-1 + 0) = 1 > 0.$

Оценки всех свободных клеток положительны, полученный план перевозок является оптимальным и единственным:

$$X^* = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции —

$$f_{\min}(X^*) = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 10 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 10 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 45 \text{ (усл. ед.).}$$

Загрузка $x_{41} = 2$ и $x_{43} = 3$ для фиктивного поставщика указывает на остаток нераспределенного груза в размере 5 единиц у потребителей B_1 и B_3.

Ответ: $X^* = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min}(X^*) = 45$ усл. ед.

6. Целочисленное программирование. Метод Гомори

Задача целочисленного линейного программирования записывается следующим образом:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min);$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1;m}), \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1;n}), \\ x_j \ (j = \overline{1;n}) \text{ — целые.} \end{cases}$$

Метод решения поставленной задачи, предложенный *Гомори*, основан на симплексном методе и состоит в следующем. Симплексным методом находится оптимальный план задачи без учета условия целочисленности.

Если оптимальный план целочисленный, то он и будет *решением всей задачи*.

Если условие целочисленности не выполняется, то на основании последней симплекс-таблицы для базисной переменной, имеющей наибольшую дробную часть, строится *дополнительное ограничение* в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \geq \{b_i\},$$

где $\{a_{ij}\}$, $\{b_i\}$ — дробные части чисел a_{ij} и b_i.

Среди нецелых свободных членов выбирают тот, который имеет наибольшую дробную часть. Дополнительное ограничение преобразовывают в уравнение, вычитая из его левой части целую неотрицательную переменную, которую затем добавляют к последней симплексной таблице. Полученную расширенную задачу решают симплекс-методом, и находят новый план. Если он не является целочисленным, то по последней симплексной таблице составляют новое дополнительное ограничение, и решение повторяется. Если задача разрешима в целых числах, то оптимальный целочисленный план найден.

Задача не имеет целочисленного решения, если для дробного b_i все a_{ij} в этой строке целые.

Замечание. Дробной частью числа $\{a\}$ называют разность между этим числом и его целой частью, т. е. наибольшим целым, не превосходящим a:

$$\{a\} = a - [a],$$

где $[a]$ — целая часть числа.

Например,

$$\left[\frac{7}{3}\right] = 2; \left[-\frac{7}{3}\right] = -3.$$

$$\left\{\frac{7}{3}\right\} = \frac{7}{3} - \left[\frac{7}{3}\right] = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3};$$

$$\left\{-\frac{7}{3}\right\} = -\frac{7}{3} - \left[-\frac{7}{3}\right] = -\frac{7}{3} + 3 = \frac{2}{3}.$$

Пример 14. Решить задачу

$$f = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \\ 3x_1 + x_2 \le 5, \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1;3}) \text{ и целые.} \end{cases}$$

Решение. Решая задачу симплекс-методом, получим оптимальный план $\left(\frac{1}{3};\ \frac{11}{3};\ 4\right)$, в котором x_1 и x_2 — дробные (табл. 33).

Таблица 33

БП	$c_Б$	A_0	1	–1	–3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	–3	4	0	0	1	2	1	0
x_2	–1	$\frac{11}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$
$f_j - c_j$		$-\frac{46}{3}$	0	0	0	$-\frac{19}{3}$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Составим дополнительное ограничение для базисной переменной $x_2 = \frac{11}{3}$, имеющей наибольшую дробную часть:

$$\left\{-\frac{1}{3}\right\}x_4 + \left\{\frac{1}{3}\right\}x_5 + \left\{\frac{2}{3}\right\}x_6 \ge \left\{\frac{11}{3}\right\}.$$

Находим дробные части:

$$\left\{-\frac{1}{3}\right\} = -\frac{1}{3} - \left[-\frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3},$$

$$\left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3},$$

$$\left\{\frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3} - \left[\frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3},$$

$$\left\{\frac{11}{3}\right\} = \frac{11}{3} - \left[\frac{11}{3}\right] = \frac{11}{3} - 3 = \frac{2}{3}.$$

Тогда ограничение примет вид

$$\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 \ge \frac{2}{3}.$$

Преобразуем это неравенство в уравнение

$$\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 - x_7 = \frac{2}{3},$$

где $x_7 \geq 0$ и целое.

Введем искусственную базисную переменную $x_8 \geq 0$ и целую. Получим

$$\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 - x_7 + x_8 = \frac{2}{3}.$$

На основании табл. 33 составим табл. 34 расширенной задачи.

Таблица 34

БП	$c_Б$	A_0	1	–1	–3	0	0	0	0	M	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	0	0	
x_2	–1	$\frac{11}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	
x_1	1	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	
x_8	M	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)$	–1	1	←
$f_j - c_j$		$-\frac{46}{3}$	0	0	0	$-\frac{19}{3}$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	
		$\frac{2}{3}M$	0	0	0	$\frac{2}{3}M$	$\frac{1}{3}M$	$\frac{2}{3}M$	$-M$	0	
								↑			

Решаем расширенную задачу симплекс-методом. План, записанный в табл. 34, не является оптимальным. Выберем разрешающий столбец: $\max\left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$ (например, шестой). Найдем $\min\left\{\frac{11}{3} : \frac{2}{3};\ \frac{1}{3} : \frac{1}{3};\ \frac{2}{3} : \frac{2}{3}\right\} = \min\left\{\frac{11}{2}; 1; 1\right\} = 1$, т. е. возьмем разрешающую, например, четвертую строку. Итак, разрешающим элементом является $\frac{2}{3}$. Выполнив симплексные преобразования, придем к табл. 35.

Таблица 35

БП	$c_Б$	A_0	1	–1	–3	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	0
x_2	–1	3	0	1	0	–1	0	0	1
x_1	1	0	1	0	0	–1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_6	0	1	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$
$f_j - c_j$		–15	0	0	0	–6	$-\frac{7}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

Полученный план (0; 3; 4; 0; 0; 1) является *оптимальным* и *целочисленным*, а $f_{\min} = -15$.

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = 4$; $f_{\min} = -15$.

7. Нелинейное программирование. Метод множителей Лагранжа

Метод множителей Лагранжа является классическим методом решения задач математического программирования (в частности, выпуклого). К сожалению, при практическом применении метода могут встретиться значительные вычислительные трудности, сужающие область его использования.

Метод Лагранжа активно используется для обоснования различных современных численных методов, широко применяемых на практике. Что же касается функции Лагранжа и множителей Лагранжа, то они играют самостоятельную и исключительно важную роль в теории и приложениях не только математического программирования.

Рассмотрим *классическую задачу оптимизации*

$$z = f(x_1; \ldots; x_n) \to \max(\min);$$

$$\varphi_i(x_1; \ldots; x_n) = b_i \; (i = \overline{1; m}).$$

Функции $f(x_1; \ldots; x_n)$ и $\varphi_i(x_1; \ldots; x_n)$ непрерывны и имеют частные производные, по крайней мере, второго порядка.

В простейшем случае *условным экстремумом* функции $f(x_1;\ x_2)$ называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что x_1 и x_2 удовлетворяют дополнительному условию (*уравнению связи*) $\varphi(x_1; x_2) = b$.

Условный экстремум функции $f(x_1; x_2)$ при наличии дополнительного ограничения $\varphi(x_1; x_2) = b$ находят с помощью так называемой *функции Лагранжа*

$$L(x_1; x_2; \lambda) = f(x_1; x_2) + \lambda \cdot (b - \varphi(x_1; x_2)),$$

где λ — неотрицательный постоянный множитель (*множитель Лагранжа*).

Необходимое условие экстремума сводится к существованию решения системы трех уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, λ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = b - \varphi(x_1;\ x_2) = 0. \end{cases}$$

В результате решения системы находятся все стационарные точки функции Лагранжа.

Достаточное условие экстремума сводится к изучению знака второго дифференциала d^2L функции Лагранжа

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} dx_2^2.$$

Функция $f(x_1; x_2)$ имеет в стационарной точке $(x_1; x_2; \lambda)$ *условный максимум*, если в ней $d^2L < 0$, и *условный минимум*, если $d^2L > 0$.

Аналогично находится условный экстремум функции трех и большего числа переменных. Заметим, что второй дифференциал d^2L функции Лагранжа для трех переменных имеет вид

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} dx_3^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 +$$

$$+ 2 \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3 + 2 \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3.$$

Можно указать следующий *порядок решения* классической задачи оптимизации *методом множителей Лагранжа*:

1. Составить функцию Лагранжа

$$L(x_1; \ldots; x_n; \lambda) = f(x_1; \ldots; x_n) + \lambda \cdot (b - \varphi(x_1; \ldots; x_n)).$$

2. Найти частные производные функции Лагранжа по всем переменным $x_1, \ldots, x_n, \lambda$ и приравнять их к нулю. Тем самым будет получена система, состоящая из $n + 1$ уравнений. Решить полученную систему (если это окажется возможным) и найти таким образом все стационарные точки функции Лагранжа.

3. Из стационарных точек функции L, взятых без координаты λ, выбрать точки, в которых функция f имеет условные экстремумы при наличии ограничения $\varphi(x_1; \ldots; x_n) = b$. Этот выбор осуществляется, например, с применением достаточного условия.

Пример 15. Найти условный экстремум функции $f = 6 - 4x_1 - 3x_2$, если $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Решение. Задачу выполняем в следующем порядке:

1) Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x_1; x_2; \lambda) = (6 - 4x_1 - 3x_2) + \lambda \cdot (1 - x_1^2 - x_2^2).$$

2) Необходимые условия дают систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -4 - 2 \cdot \lambda \cdot x_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -3 - 2 \cdot \lambda \cdot x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$\lambda' = -\frac{5}{2},\ x_1' = \frac{4}{5},\ x_2' = \frac{3}{5};$$

$$\lambda'' = \frac{5}{2},\ x_1'' = -\frac{4}{5},\ x_2'' = -\frac{3}{5}.$$

3. Так как $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = -2\lambda,\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = -2\lambda,\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$ то

$d^2 L = -2\lambda dx_1^2 - 2\lambda dx_2^2 = -2\lambda \cdot (dx_1^2 + dx_2^2).$

Если $\lambda' = -\dfrac{5}{2}$, $x_1' = \dfrac{4}{5}$, $x_2' = \dfrac{3}{5}$, то $d^2L > 0$. Значит, в точке $A\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{3}{5}\right)$ функция f имеет условный минимум.

Если же $\lambda'' = \dfrac{5}{2}$, $x_1'' = -\dfrac{4}{5}$, $x_2'' = -\dfrac{3}{5}$, то $d^2L < 0$. Значит, в точке $B\left(-\dfrac{4}{5}; -\dfrac{3}{5}\right)$ функция f имеет условный максимум.

При этом $f_{\max} = 11$, $f_{\min} = 1$.

Ответ: $f_{\max}\left(-\dfrac{4}{5}; -\dfrac{3}{5}\right) = 11$, $f_{\min}\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{3}{5}\right) = 1$.

8. Метод динамического программирования. Задача выбора кратчайшего пути

Эта задача находит широкое применение в различных сферах деятельности. По сути решения аналогичными являются задачи выбора оптимальных схем транспортных перевозок, радиорелейных и телевизионных сетей, мелиорационных и ирригационных систем и т. п.

Пример 16. На данной сети дорог (рис. 15) указаны расстояния (в км) между промежуточными пунктами сети.

Найти самый короткий маршрут из пункта 1 в пункт 10, составить таблицу оптимальных маршрутов из всех остальных пунктов сети в пункт 10 и указать кратчайшее расстояние от каждого пункта до пункта 10.

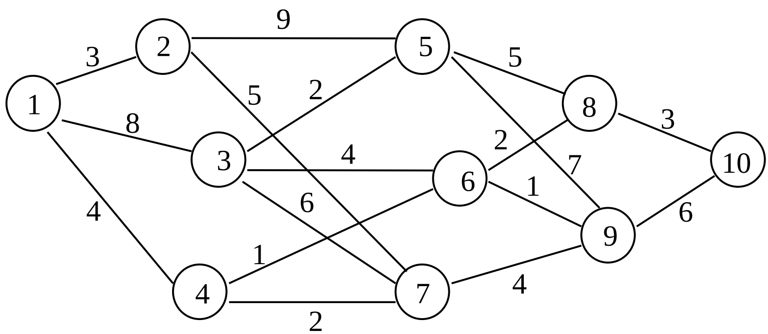


Рис. 15

Решение. Задаче необходимо придать *шаговый характер*. Разобьем все пункты сети на группы (табл. 36).

Таблица 36

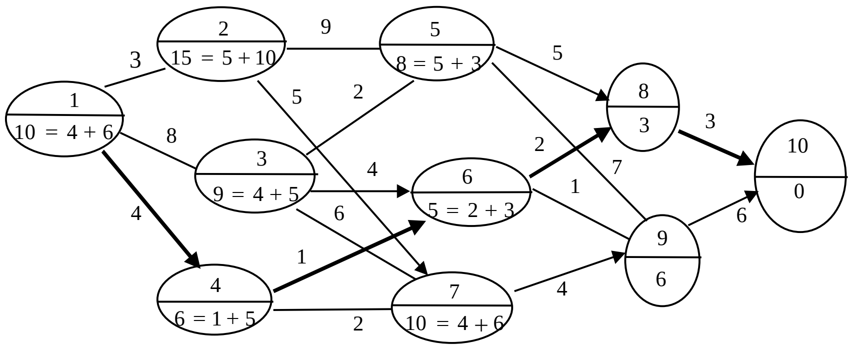
Группы				
1-я	2-я	3-я	4-я	5-я
1	2 3 4	5 6 7	8 9	10

К первой группе отнесем пункт 1; ко второй — пункты, в которые можно попасть непосредственно из пункта 1 (таковыми будут пункты 2, 3, 4); к третьей группе отнесем пункты, в которые можно попасть непосредственно из любого пункта второй группы (пункты 5, 6, 7) и т. д. В результате движение из пункта 1 в пункт 10 распадается на этапы.

На первом этапе необходимо из пункта 1 попасть в какой-нибудь пункт второй группы, на втором этапе — из пункта второй группы в пункт третьей группы и т. д.

В связи с этим маршрут из пункта 1 в пункт 10 разобьется на шаги. В данном случае этот процесс будет состоять из четырех шагов.

Будем оптимизировать каждый шаг, начиная с последнего, четвертого, при этом условные оптимальные шаговые решения пометим на сети стрелкой, выходящей из соответствующего кружка, а условный оптимальный эффект (в нашем случае — расстояние, которое следует преодолеть от данного пункта до пункта 10, двигаясь по оптимальному маршруту) запишем в нижнем кружке (рис. 16).



1-й шаг 2-й шаг 3-й шаг 4-й шаг

Рис. 16

На четвертом шаге в пункт 10 можно попасть из пункта 8 или 9, причем только одним способом: из пункта 8 — дорогой 8–10, при этом придется одолеть 3 км, из пункта 9 — дорогой 9–10, преодолев 6 км. Результатом оптимизации четвертого шага являются первые две стрелки (на ребрах (8; 10) и (9; 10) сети).

Переходим к оптимизации третьего шага. Для этого проанализируем все возможные варианты движения из пунктов 5, 6, 7. Для каждого пункта выбираем условное оптимальное решение (оптимальный маршрут в пункт 10) и вычисляем соответствующее минимальное расстояние. Из пункта 5 можно следовать либо через пункт 8, либо через пункт 9. В первом случае расстояние равно 5 + 3 = 8 км, во втором — 7 + 6 = = 13 км. Значит, условный оптимальный маршрут из пункта 5 в пункт 10 проходит через пункт 8. На ребре (5; 8) ставим стрелку, а в кружке 5 записываем минимальное расстояние 8 = 5 + 3, ребро (5; 9) остается без стрелки. Аналогично для пункта 6 находим условно-оптимальный маршрут 6–8–10 с расстоянием до пункта 10 в 5 км, для пункта 7 — условно-оптимальный маршрут 7–9–10 с расстоянием в 10 км.

Далее оптимизируем путь для второго шага процесса. Здесь находим оптимальный маршрут в пункт 10 из каждого пункта второй группы (2, 3, 4).

Для каждого из этих пунктов надо проанализировать все возможные маршруты из этого пункта и найти сумму расстояний до ближайшего пункта третьей группы и условно-минимальное расстояние на оптимальном продолжении пути в пункт 10 от этого пункта, которое найдено в результате оптимизации третьего шага. Из всех возможных маршрутов выбираем тот, для которого эта сумма меньше (если суммы равны, выбираем любой маршрут). Для пункта 2 оптимальным будет маршрут протяженностью в 15 км, проходящий через пункт 7, поскольку по этому маршруту получаем минимальную из сумм (9 + 8) и (5 + 10); для пункта 3 — маршрут, проходящий через пункт 6 с расстоянием 4 + 5 = 9 км; для пункта 4 — маршрут через пункт 6 с расстоянием 1 + 5 = 6 км.

Оптимизируем первый шаг. Сравним три возможных маршрута: через пункты 2, 3, 4. Устанавливаем, что наикратчайшим будет маршрут, пролегающий через пункт 4, как маршрут, отвечающий минимальной из сумм (3 + 15), (8 + 9), (4 + 6), равной 10.

Этап условной оптимизации закончен, и остается проследить оптимальный маршрут. Движение из пункта 1 по сети в направлении стрелок позволяет сформировать следующий самый короткий маршрут: 1–4–6–8–10. Его протяженность составляет 10 км. На рисунке он выделен жирной линией.

Примененный для решения задачи метод динамического программирования дает возможность одновременно с оптимальным маршрутом из пункта 1 в пункт 10 найти всю систему оптимальных маршрутов относительно пункта 10 для данной сети дорог. Все эти маршруты приведены в табл. 37.

Таблица 37

Исходный пункт	Оптимальный путь в пункт 10, проходящий через пункты	Кратчайшее расстояние
2	7 и 9	15
3	6 и 8	9
4	6 и 8	6
5	8	8
6	8	5
7	9	10
8	—	3
9	—	6

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Методом жордановых исключений решить систему линейных уравнений:

1.1. $\begin{cases} 5x_1+6x_2+3x_3=2, \\ -x_1+3x_2-x_3=-2, \\ x_1+x_2+2x_3=6. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} -2x_1+4x_2-3x_3=-9, \\ 3x_1+5x_2+x_3=7, \\ -x_1+x_2-x_3=-3. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3=1, \\ -2x_1+x_2+4x_3=-3, \\ 4x_1+5x_2-3x_3=4. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 2x_1+4x_2+3x_3=3, \\ -3x_1+2x_2+4x_3=5, \\ x_1-x_2-x_3=0. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=1, \\ -3x_1+x_2-2x_3=4, \\ x_1+4x_2+3x_3=3. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} -x_1+3x_2+4x_3=1, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=-1, \\ -2x_1-x_2+2x_3=1. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3=4, \\ x_1+2x_2+x_3=3, \\ -3x_1+x_2-2x_3=-5. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1-3x_2-4x_3=-3, \\ -3x_1+x_2+2x_3=0, \\ -x_1+4x_2+5x_3=5. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 2x_1+5x_2-3x_3=4, \\ -x_1+3x_2+2x_3=4, \\ 3x_1-2x_2-4x_3=-3. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=2, \\ 3x_1+x_2-2x_3=3, \\ 7x_1+3x_2+3x_3=2. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=-1, \\ 4x_1+6x_2+3x_3=2, \\ -3x_1-x_2+2x_3=-5. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} -x_1+3x_2+2x_3=1, \\ 4x_1+5x_2+3x_3=-5, \\ 3x_1+8x_2+4x_3=-7. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=7, \\ -x_1+4x_2-2x_3=-5, \\ 4x_1+2x_2+x_3=-1. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} 3x_1-x_2+4x_3=-2, \\ -2x_1+3x_2-2x_3=13, \\ -x_1+2x_2-3x_3=9. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x_1-3x_2-4x_3=4, \\ -2x_1+x_2+3x_3=-3, \\ 3x_1-2x_2-4x_3=6. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3=3, \\ -3x_1+3x_2-4x_3=-3, \\ -x_1+4x_2-3x_3=0. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=-3, \\ 4x_1+5x_2+3x_3=-5, \\ -3x_1+2x_2-3x_3=3. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=-3, \\ 4x_1+5x_2-2x_3=-3, \\ -5x_1-3x_2+3x_3=-6. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=3, \\ -x_1+3x_2-2x_3=-4, \\ -2x_1+5x_2-3x_3=-5. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=5, \\ -x_1+4x_2-3x_3=6, \\ -3x_1+2x_2-3x_3=4. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} -x_1-2x_2+2x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=-3, \\ 4x_1+5x_2+x_3=-3. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3=4, \\ -2x_1+3x_2-2x_3=-3, \\ 2x_1+x_2+3x_3=-2. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-7, \\ -2x_1+x_2+2x_3=-5, \\ 5x_1+3x_2+2x_3=4. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3=5, \\ -2x_1-3x_2+3x_3=-10, \\ -x_1+5x_2+x_3=-3. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} -2x_1+3x_2-x_3=1, \\ 5x_1+x_2+2x_3=4, \\ -x_1+4x_2-4x_3=-11. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} -x_1+5x_2+2x_3=8, \\ -4x_1-3x_2+x_3=6, \\ -2x_1+4x_2+2x_3=8. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 2x_1-4x_2-3x_3=2, \\ -x_1+2x_2+5x_3=-8, \\ 3x_1-3x_2-2x_3=1. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3=1, \\ -3x_1+4x_2-4x_3=2, \\ 5x_1-2x_2-x_3=3. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3=0, \\ -x_1+7x_2-3x_3=-5, \\ 4x_1-3x_2-2x_3=5. \end{cases}$

1.31. $\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3=2, \\ 2x_1+3x_2+6x_3=4, \\ -2x_1+5x_2-3x_3=-7. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -8, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

1.32. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -2, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

1.33. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases}$

1.35. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$

1.34. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ -5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

Задание 2. Методом жордановых исключений решить систему линейных уравнений:

2.1. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ -8x_1 + 6x_2 - 5x_3 = -1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 11x_3 = 3. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 3. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -2. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 1, \\ -4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = -4. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -6, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 3. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+\ \ x_3=1, \\ -2x_1+4x_2-3x_3=5, \\ x_1+2x_2-2x_3=3. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} x_1+\ 3x_2-\ 7x_3=-1, \\ -2x_1+\ \ x_2+\ 4x_3=3, \\ 2x_1+13x_2-24x_3=2. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} 3x_1-\ x_2-\ x_3=5, \\ 2x_1+8x_2-3x_3=-1, \\ -x_1+9x_2-2x_3=2. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} 4x_1-5x_2+3x_3=0, \\ -x_1+3x_2+2x_3=1, \\ 2x_1+\ x_2+7x_3=-1. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=1, \\ 3x_1-2x_2+\ x_3=2, \\ -x_1-4x_2+7x_3=-1. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} 4x_1-2x_2+\ \ x_3=-1, \\ -2x_1+3x_2-2x_3=0, \\ 2x_1+\ x_2-\ \ x_3=1. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} 7x_1-\ x_2+\ \ \ x_3=5, \\ -x_1+4x_2+\ 8x_3=-2, \\ 5x_1+7x_2+19x_3=0. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+\ 4x_3=1, \\ -2x_1-\ x_2+\ 2x_3=-3, \\ 4x_1+5x_2+10x_3=0. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} x_1-8x_2+3x_3-2x_4=1, \\ -2x_1+\ 3x_2-3x_3+\ x_4=5, \\ x_1-21x_2+8x_3-5x_4=-2. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} 2x_1-8x_2-3x_3+\ x_4=0, \\ -3x_1+2x_2-\ x_3-2x_4=1, \\ x_1+6x_2+4x_3+\ x_4=2. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} 5x_1-3x_2+4x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+\ x_3=-1, \\ 2x_1-5x_2+3x_3=2. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} 3x_1-8x_2-7x_3+\ x_4=2, \\ -5x_1+4x_2+3x_3+\ x_4=1, \\ 2x_1+4x_2+4x_3-2x_4=5. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} 2x_1-\ x_2+3x_3=-1, \\ -4x_1+8x_2-5x_3=2, \\ 2x_1-7x_2+2x_3=4. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} x_1-6x_2+3x_3=5, \\ 4x_1+3x_2-7x_3=-1, \\ 2x_1-9x_2-\ x_3=-2. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} 4x_1-2x_2+8x_3-\ x_4=-2, \\ -2x_1+3x_2-5x_3+2x_4=-1, \\ 2x_1+\ x_2+3x_3+\ x_4=5. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+8x_3=5, \\ -3x_1-2x_2+\ x_3=-1, \\ -x_1-5x_2+9x_3=3. \end{cases}$

2.31. $\begin{cases} 4x_1-2x_2-\ x_3-\ x_4=-1, \\ -3x_1-\ x_2+4x_3-8x_4=5, \\ x_1-3x_2+3x_3-9x_4=-4. \end{cases}$

2.32. $\begin{cases} 6x_1-\ x_2+7x_3+x_4=0, \\ 3x_1-4x_2+2x_3-x_4=-1, \\ 3x_1+3x_2+5x_3\ \ \ \ \ \ \ =7. \end{cases}$

2.33. $\begin{cases} -x_1+4x_2-8x_3=-5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3=3, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=-1. \end{cases}$

2.34. $\begin{cases} 7x_1+x_2-2x_3=-1, \\ -2x_1-3x_2+7x_3=3, \\ 5x_1-2x_2+5x_3=-2. \end{cases}$

2.35. $\begin{cases} 3x_1-8x_2+\ x_3-\ x_4=5, \\ -2x_1+4x_2-8x_3+5x_4=-1, \\ x_1-4x_2-7x_3+4x_4=2. \end{cases}$

Задание 3. Найти опорные решения систем линейных уравнений:

3.1. а) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+x_4=1, \\ 2x_1-x_2-x_3+3x_4=-5, \\ -x_1+2x_2-3x_3-x_4=-1, \\ -3x_1+x_2+x_3-x_4=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+2x_4-x_5=-2, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=3. \end{cases}$

3.2. а) $\begin{cases} -x_1+x_3-x_4=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3-x_4=1, \\ -x_1-x_2-x_3+3x_4=4, \\ -2x_1-x_2+3x_3+x_4=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3x_1+x_3-x_4-2x_5=3, \\ x_1-x_2+x_5=7. \end{cases}$

3.3. а) $\begin{cases} -x_1-x_2+x_4=3, \\ -x_2+2x_3=8, \\ x_1+x_2-x_4=-3, \\ 4x_1+5x_2-x_3+3x_4=7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1-x_2+x_5=4, \\ -x_1-x_3+x_4=2. \end{cases}$

3.4. а) $\begin{cases} 6x_1+x_3-x_4=2, \\ x_1-x_2+3x_3+x_4=-3, \\ -5x_1+x_2-x_3-x_4=1, \\ -2x_1+2x_2-6x_3-2x_4=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2+x_5=1, \\ -x_1-x_3-x_5=2. \end{cases}$

3.5. а) $\begin{cases} -7x_1-x_3+x_4=4, \\ x_1+x_2+x_3-x_4=-3, \\ -x_1+3x_2+3x_3-x_4=1, \\ -x_1-x_2-x_3+x_4=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+7x_3+x_5=3, \\ 2x_2-x_4-x_5=4. \end{cases}$

3.6. а) $\begin{cases} x_1-x_3+x_4=5, \\ 2x_1-7x_2+3x_3-4x_4=3, \\ -x_1+x_3-x_4=-5, \\ 2x_1+5x_2-2x_3+7x_4=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -4x_1+7x_2-x_3+x_4-x_5=2, \\ 5x_1-8x_2+x_5=-7. \end{cases}$

3.7. а) $\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3+4x_4=1, \\ x_1+2x_2-3x_3-x_4=-2, \\ -x_1-x_2+4x_3=3, \\ 2x_1-x_2+x_3-4x_4=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_2-x_5=7, \\ x_1-x_3+x_5=8. \end{cases}$

3.8. а) $\begin{cases} -3x_1+x_2+x_3+x_4=-5, \\ x_2-2x_3+3x_4=-1, \\ -4x_1-x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3-x_4=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_3-x_5=7, \\ x_1+x_2-x_3+x_4=2. \end{cases}$

3.9. а) $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4, \\ -x_2 + 7x_3 = 5, \\ -7x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + x_5 = 3, \\ 3x_1 + x_3 - 6x_4 = 4. \end{cases}$

3.10. а) $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_5 = 4. \end{cases}$

3.11. а) $\begin{cases} 3x_1 - x_3 + x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

3.12. а) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 5, \\ -4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2 - 3x_4 = 7, \\ x_1 - x_3 + x_5 = 3. \end{cases}$

3.13. а) $\begin{cases} x_2 + 4x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 4, \\ -x_2 - 4x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 - x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 7x_5 = 3. \end{cases}$

3.14. а) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_3 + x_5 = -2, \\ 8x_1 - x_2 + x_4 = 5. \end{cases}$

3.15. а) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_4 - x_5 = -3. \end{cases}$

3.16. а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ 6x_1 - x_3 - x_4 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_3 - x_4 + x_5 = -3, \\ x_2 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

3.17. а) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 7x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4 = 5, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 - x_2 = 2, \\ x_3 + 2x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$

3.18. а) $\begin{cases} 6x_1 - 7x_2 \quad + \quad x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_3 + 2x_4 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_2 + x_3 - x_5 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 3. \end{cases}$

3.19. а) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ -x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ -x_3 + x_5 = 2. \end{cases}$

3.20. а) $\begin{cases} 4x_1 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ -2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = -6, \\ 8x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$

3.21. а) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - x_3 = 6, \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_3 - x_5 = -5, \\ x_1 - 7x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$

3.22. а) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = -3, \\ 7x_1 - 8x_2 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 3x_5 = 7. \end{cases}$

3.23. а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 = -1, \\ 2x_1 + 5x_3 - x_4 = 3, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_3 - x_4 + x_5 = -2. \end{cases}$

3.24. а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_2 + x_3 = -5, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_4 + 2x_5 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

3.25. а) $\begin{cases} 4x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 - x_2 - x_4 = 5, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_4 = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 3, \\ -x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$

3.26. а) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_3 - x_4 = 4, \\ 7x_1 - x_2 - x_4 = 3, \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 - x_2 = -3, \\ x_3 - x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

3.27. а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 2, \\ -6x_1 + 7x_3 - x_4 = 3, \\ -2x_1 - 3x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2 + x_5 = -5, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

3.28. а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 7, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_3 = 2, \\ x_2 + x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$

3.29. а) $\begin{cases} 6x_1 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 5, \\ 7x_2 + x_4 - x_5 = -2. \end{cases}$

3.30. а) $\begin{cases} 6x_1 - 3x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_3 + 5x_4 = 3, \\ -6x_1 + 3x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_4 - 2x_5 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

3.31. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = -1, \\ -x_1 + x_3 + x_4 = -1, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_3 - x_4 + x_5 = -6, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 5. \end{cases}$

3.32. а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 - x_4 = -3, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_4 + 3x_5 = -1, \\ 3x_2 - x_3 - x_5 = -2. \end{cases}$

3.33. а) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 5, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -6x_2 - x_5 = -3, \\ -x_1 - x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

3.34. а) $\begin{cases} 3x_1 \qquad - 2x_3 + x_4 = -5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 \qquad + x_3 - x_5 = 6, \\ \qquad 2x_2 + x_3 - 3x_5 = -1. \end{cases}$

3.35. а) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 7x_1 \qquad - x_3 + x_4 = -2, \\ 5x_1 - x_2 \qquad - x_4 = 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \qquad 2x_3 - x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 \qquad - 2x_5 = 3. \end{cases}$

Задание 4. Решить графически задачи линейного программирования:

4.1. а) $f = 2x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$; б) $f = x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$;

$\begin{cases} -2x_1 + \ x_2 \le 4, \\ 2x_1 + \ 5x_2 \ge 10, \\ 5x_1 + 11x_2 \le 55, \\ -2x_1 + \ 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - \ x_2 \ge -4, \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 15, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0; \end{cases}$

в) $f = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 - 6x_6 + 19 \to \min$;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_5 = 9, \\ x_2 - x_6 = 1, \\ x_i \ge 0 \, (i = \overline{1;6}). \end{cases}$$

4.2. а) $f = -x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$; б) $f = x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le -4, \\ x_2 \le 8, \\ x_1 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0; \end{cases}$

в) $f = -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 3x_6 - 27 \to \min$;

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_5 = 30, \\ -x_1 + 3x_2 - x_6 = 3, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;6}). \end{cases}$$

4.3. а) $f = 2x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -6, \\ x_2 \leq 9, \\ x_1 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = -2x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = x_1 - 13x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + 41 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_4 = 30, \\ x_2 + x_5 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = -3, \\ x_i \geq 0\ (i = \overline{1;6}). \end{cases}$$

4.4. а) $f = -3x_1 - 5x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ x_1 + 7x_2 \geq 14, \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = 3x_1 + x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 \geq 1, \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - 3x_6 - 35 \to \max$;

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 28, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_5 = 3, \\ -x_1 + x_2 - x_6 = 1, \\ x_i \geq 0\ \ (i = \overline{1;6}). \end{cases}$$

4.5. а) $f = -2x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \leq 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = -x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 + 60 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_4 = 12, \\ x_2 - x_5 = 1, \\ 4x_1 + 10x_2 + x_6 = 40, \\ x_i \geq 0\ (i = \overline{1;6}). \end{cases}$$

4.6. а) $f = 4x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ -7x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = -3x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 1, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 - 5 \to \min$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 10, \\ x_i \geq 0 \; (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.7. а) $f = 3x_1 - 9x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 \leq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = -2x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 \leq 7, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 + 40 \to \max$;

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_2 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 18, \\ x_i \geq 0 \; (i = \overline{1;6}). \end{cases}$$

4.8. а) $f = -x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_2 \leq 5, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 30, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = 4x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 21, \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 - 12 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -6, \\ x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_5 = 8, \\ x_1 + 2x_2 - x_6 = 8, \\ x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1;6}). \end{cases}$$

4.9. а) $f = x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 - 3x_2 \leq -3, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = 4x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 \geq 3, \\ x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 4 \to \min$;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15, \\ x_1 + 7x_2 - x_5 = 14, \\ x_i \geq 0 \ \ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.10. а) $f = 2x_1 + x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 \geq 1, \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28, \\ 2x_1 + \ \ x_2 \geq 2, \\ 2x_1 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = 3x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 \geq 42, \\ -x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = 3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 - 3x_6 - 11 \to \min$;

$$\begin{cases} -2x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = 10, \\ 5x_1 + 11x_2 + x_5 = 55, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_6 = 6, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1;6}). \end{cases}$$

4.11. а) $f = -2x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 12, \\ x_2 \geq 1, \\ 4x_1 + 10x_2 \leq 40, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = -3x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 3, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 - x_6 - 52 \to \min$;

$$\begin{cases} -6x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 = 6, \\ x_2 - x_6 = 1, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1;6}). \end{cases}$$

4.12. а) $f = -2x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = 2x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 3, \\ 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 7x_1 + x_2 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_6 = 1, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;6}). \end{cases}$$

4.13. а) $f = -2x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 6, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 - 12 \to \min$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 15, \\ 7x_1 + 9x_2 + x_4 = 63, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_5 = 6, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.14. а) $f = 4x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 20, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = -2x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 \le 5, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - 24 \to \max$;

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15, \\ 6x_1 + 7x_2 + x_4 = 42, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_5 = 12, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.15. а) $f = 4x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + \quad x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = -2x_1 - x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -2x_1 + \quad x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - 5x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 - 27 \to \min$;

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + x_3 = 30, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 = 12, \\ x_2 + x_5 = 3, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.16. а) $f = -x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = -4x_1 - 4x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 + 10 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_2 + x_5 = 4, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.17. а) $f = -2x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 5x_1 + 8x_2 \le 40, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = -x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_2 \le 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \to \min$;

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15, \\ 6x_1 + 7x_2 + x_4 = 42, \\ x_1 - \quad x_2 + x_5 = 3, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.18. а) $f = 3x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 \le 2, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 28, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 - 16 \to \min$;

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 + x_3 = 70, \\ 6x_1 + 5x_2 - x_4 = 30, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 6, \\ x_i \ge 0\ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.19. а) $f = -2x_1 - x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 \le 54, \\ 4x_1 + 7x_2 \ge 28, \\ 2x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = 2x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 2, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 - 3 \to \max$;

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 20, \\ 6x_1 + 5x_2 + x_4 = 30, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_6 = 2, \\ x_i \ge 0\ (i = \overline{1;6}). \end{cases}$$

4.20. а) $f = 4x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 20, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = -2x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ x_2 \le 8, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 - 40 \to \max$;

$$\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 - x_3 = 42, \\ 8x_1 + 9x_2 + x_4 = 72, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2, \\ x_i \ge 0\ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.21. а) $f = -2x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 8x_1 + \ \ x_2 \ge 8, \\ 10x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1 - \ \ x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = -x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \ge 21, \\ x_1 \le 7, \\ 3x_1 - \ \ x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = -5x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 - 3 \to \max$;

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_5 = 1, \\ x_2 - x_6 = 1, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;6}). \end{cases}$$

4.22. а) $f = 7x_1 + 9x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 \le 63, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = -2x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \ge 2, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = 5x_1 - 17x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 + 27 \to \min$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18, \\ -x_1 + \ \ x_2 + x_5 = 3, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.23. а) $f = 11x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30, \\ 11x_1 + 5x_2 \le 55, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = 2x_1 - 5x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 5, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 38 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_4 = 30, \\ -4x_1 + 5x_2 - x_5 = -20, \\ x_i \ge 0 \ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.24. а) $f = 3x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ 7x_1 + 9x_2 \leq 63, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = 5x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq 8, \\ x_1 - 6x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 7 \to \min$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_5 = 4, \\ x_i \geq 0\ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.25. а) $f = -4x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = -2x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_2 \geq 1, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 \to \min$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8, \\ x_i \geq 0\ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.26. а) $f = -3x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = 3x_1 + 6x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 \geq 4, \\ x_2 \geq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = -4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + 26 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_4 = 20, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 3, \\ x_i \geq 0\ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.27. а) $f = 3x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = -x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 \geq 7, \\ x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 - 1 \to \max$;

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 1, \\ x_i \geq 0\ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.28. а) $f = 2x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 \leq 60, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = 3x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -5x_1 + 7x_2 \leq 35, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 - 21 \to \max$;

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + x_3 = 35, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ x_i \geq 0\ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.29. а) $f = -5x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = 3x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 - 22 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_1 + 8x_2 + x_4 = 40, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 6, \\ x_i \geq 0\ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.30. а) $f = 3x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \le 70, \\ 6x_1 + 5x_2 \ge 30, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = -3x_1 - 4x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_2 \ge 1, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 + 36 \to \max$;

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 28, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_5 = 2, \\ x_i \ge 0\ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.31. а) $f = -x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \ge 20, \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = -2x_1 - 5x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1 \le 6, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + 4 \to \max$;

$$\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + x_3 = 54, \\ 4x_1 + 7x_2 - x_4 = 28, \\ 2x_1 - \ \ x_2 - x_5 = -2, \\ x_i \ge 0\ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.32. а) $f = 4x_1 - 4x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 \ge 42, \\ 8x_1 + 9x_2 \le 72, \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 \le 2, \\ \ \ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $f = -4x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $f = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - 14 \to \min$;

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + x_3 = 24, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_4 = 20, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ x_i \ge 0\ (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.33. а) $f = -x_1 + x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \geq 18, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = 5x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 \geq 1, \\ 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 - 17 \to \max$;

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 = 8, \\ 10x_1 + 3x_2 + x_4 = 30, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 1, \\ x_i \geq 0 \; (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.34. а) $f = -4x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ -4x_1 + 5x_2 \geq -20, \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = -x_1 - 4x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - 49 \to \max$;

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + x_3 = 63, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = 10, \\ x_2 + x_5 = 4, \\ x_i \geq 0 \; (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

4.35. а) $f = x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0; \end{cases}$$

б) $f = 3x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$;

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_2 \geq 1, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0; \end{cases}$$

в) $f = -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 7 \to \min$;

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 - x_3 = 30, \\ 11x_1 + 5x_2 + x_4 = 55, \\ x_2 - x_5 = 2, \\ x_i \geq 0 \; (i = \overline{1;5}). \end{cases}$$

Задание 5. Решить задачу симплексным методом:

5.1. $z = 5x_1 - x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge -1, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.2. $z = 8x_1 + 3x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 \le 5, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.3. $z = 2x_1 - 7x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 - 7x_2 \ge -5, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.4. $z = 6x_1 + 5x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -2x_1 - 7x_2 \ge -5, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.5. $z = 6x_1 - 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -2, \\ x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_1 - x_2 \ge -3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.6. $z = 7x_1 + 9x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 4, \\ -x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.7. $z = 3x_1 - 8x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ -x_1 - 5x_2 \le 1, \\ x_1 - 3x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.8. $z = 9x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 5, \\ -5x_1 - x_2 \ge -1, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.9. $z = 4x_1 - 3x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 \ge -2, \\ x_1 + 2x_2 \le 3, \\ -5x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.10. $z = 2x_1 + 5x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 - 3x_2 \le 5, \\ x_1 - 3x_2 \ge -4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.11. $z = 5x_1 - 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.12. $z = x_1 + 5x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge -2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.13. $z = 8x_1 - x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 - x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.14. $z = 9x_1 + 7x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 5x_1 - x_2 \le 3, \\ -x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.15. $z = 5x_1 - 3x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 7x_1 + x_2 \le 3, \\ -5x_1 + 4x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.16. $z = 2x_1 + 9x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \\ -3x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.17. $z = 3x_1 - 6x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 - 4x_2 \ge -2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.18. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 - x_2 \ge -1, \\ 3x_1 + 7x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.19. $z = 3x_1 - 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge -3, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.20. $z = 4x_1 + 7x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 2, \\ -x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + 5x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.21. $z = x_1 - 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \ge -1, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 3, \\ -x_1 + 3x_2 \ge -2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.22. $z = 3x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 \le 2, \\ -4x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.23. $z = 3x_1 - 7x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 - 2x_2 \ge -4, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.24. $z = x_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 4x_1 - x_2 \ge -3, \\ x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.25. $z = x_1 - 8x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 - 4x_2 \ge -3, \\ x_1 + 5x_2 \ge -4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.26. $z = 7x_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \ge -1, \\ x_1 + 2x_2 \le 1, \\ 4x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.27. $z = 2x_1 - 6x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 \ge -6, \\ x_1 + 7x_2 \le 3, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.28. $z = x_1 + 3x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \\ -x_1 - 4x_2 \ge -2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.29. $z = 2x_1 - 3x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} -x_1 + 6x_2 \le 2, \\ -x_1 - 4x_2 \ge -2, \\ -2x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.30. $z = 6x_1 + 3x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ -5x_1 - 3x_2 \ge -1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.31. $z = 7x_1 - 3x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.32. $z = 4x_1 + x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \ge -1, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 3, \\ x_1 - 3x_2 \ge -2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.33. $z = 3x_1 - 5x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.34. $z = 2x_1 + x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ -x_1 + 4x_2 \ge -3, \\ 2x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5.35. $z = x_1 - x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \ge -4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задание 6. Решить методом искусственного базиса задания 4.1а–4.35а, 4.1б–4.35б.

Задание 7. Исходя из условий заданий 4.1а–4.35а составить двойственную задачу и решить ее симплексным методом.

Задание 8. Решить транспортную задачу:

8.1. На складе А находится сортовое зерно массой 10 т, складе В — 15 т, складе С — 25 т. Зерно надо доставить в пункты № 1 (5 т), № 2 (10 т), № 3 (20 т) и № 4 (15 т). Стоимость доставки 1 т со склада А в пункт № 1 — 8 усл. ед., № 2 — 3 усл. ед., № 3 — 5 усл. ед., № 4 — 2 усл. ед.; со склада В в пункт № 1 — 4 усл. ед., № 2 — 1 усл. ед., № 3 — 6 усл. ед., № 4 — 7 усл. ед..; со склада С в пункт № 1 — 1 усл. ед., № 2 — 9 усл. ед., № 3 — 4 усл. ед., № 4 — 3 усл. ед.

Составить оптимальный план перевозки зерна, минимизирующий стоимость перевозок.

8.2. В городе имеются 4 хлебозавода, которые снабжаются мукой 3 мелькомбинатами. Все необходимые данные приведены в следующей таблице:

Мелькомбинат	Хлебозавод				Суточная производительность, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
№ 1	4	2	4	7	25
№ 2	7	6	6	8	20
№ 3	2	2	3	6	35
Суточная потребность в муке, т	30	20	12	18	

Найти такой план поставок муки на хлебозавод, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

8.3. Для контроля за космической ракетой установлены датчики типов D_1 (60 шт.), D_2 (40 шт.), D_3 (70 шт.), D_4 (30 шт.). Каждый датчик определяет одну из характеристик (температуру, давление и другие показатели) и результат передает по отдельному каналу связи любому из 5 типов наземных автоматических регистрирующих устройств (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5). Количество устройств P_1 насчитывает 60 шт., P_2 — 40 шт., P_3 — 40 шт., P_4 — 30 шт., P_5 — 30 шт. Затраты времени на включение соответствующего канала связи определяются элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

где 8, например, — время, затрачиваемое на включение канала связи датчика D_2 с регистрирующим устройством P_5.

Указать, как следует закрепить датчики за регистрирующими устройствами, чтобы суммарные затраты времени на переключение каналов связи были минимальными.

8.4. Для ежедневного снабжения пунктов B_1, B_2, B_3, B_4 ферма A_1 выделяет 40 ц молока, ферма A_2 — 50 ц, ферма A_3 — 30 ц молока. Стоимость перевозки 1 ц молока и потребность пунктов в молоке указаны в следующей таблице:

Ферма	Стоимость перевозки 1 ц молока потребителям, усл. ед., в пункты				Количество молока, предназначенное для вывоза, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	2,5	3,5	4	40
A_2	2	4,5	5	1	50
A_3	6	3,8	4,2	2,8	30
Потребность в молоке, ц	20	40	30	30	

Организовать снабжение так, чтобы потребители обеспечивались молоком, а транспортные расходы были минимальными.

8.5. На складе A находится сортовое зерно массой 20 т, складе B — 25 т, складе C — 25 т. Зерно надо доставить в пункты № 1 (19 т), № 2 (10 т), № 3 (17 т), № 4 (13 т) и № 5 (11 т). Стоимость доставки 1 т со склада A в пункт № 1 — 9 усл. ед., № 2 — 8 усл. ед., № 3 — 1 усл. ед., № 4 — 4 усл. ед., № 5 — 7 усл. ед.; со склада B в пункт № 1 — 4 усл. ед., № 2 — 5 усл. ед., № 3 — 20 усл. ед., № 4 — 1 усл. ед., № 5 — 10 усл. ед.; со склада C в пункт № 1 — 3 усл. ед., № 2 — 9 усл. ед., № 3 — 4 усл. ед., № 4 — 2 усл. ед., № 5 — 1 усл. ед.

Составить оптимальный план перевозки зерна, минимизирующий стоимость перевозок.

8.6. В городе имеются 5 хлебозаводов, которые снабжаются мукой 3 мелькомбинатами. Все необходимые данные приведены в следующей таблице:

Мелькомбинат	Хлебозавод					Суточная производительность, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	
№ 1	4	6	2	1	5	15
№ 2	7	10	4	9	8	25
№ 3	5	1	6	3	4	20
Суточная потребность в муке, т	18	12	9	10,5	10,5	

Найти такой план поставок муки на хлебозавод, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

8.7. Для контроля за космической ракетой установлены датчики типов D_1 (20 шт.), D_2 (30 шт.), D_3 (40 шт.). Каждый датчик определяет одну из характеристик (температуру, давление и другие показатели) и результат передает по отдельному каналу связи любому из 4 типов наземных автоматических регистрирующих устройств (P_1, P_2, P_3, P_4). Количество устройств P_1 насчитывает 20 шт., P_2 — 30 шт., P_3 — 20 шт., P_4 — 20 шт. Затраты времени на включение соответствующего канала связи определяются элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

где 7, например, — время, затрачиваемое на включение канала связи датчика D_2 с регистрирующим устройством P_4.

Указать, как следует закрепить датчики за регистрирующими устройствами, чтобы суммарные затраты времени на переключение каналов связи были минимальными.

8.8. Для ежедневного снабжения пунктов B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ферма A_1 выделяет 28 ц молока, ферма A_2 — 34 ц, ферма A_3 — 28 ц молока. Стоимость перевозки 1 ц молока и потребность пунктов в молоке указаны в следующей таблице:

Ферма	Стоимость перевозки 1 ц молока потребителям, усл. ед., в пункты					Количество молока, предназначенное для вывоза, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	6	10	5	2	28
A_2	2	7	1	3	5	34
A_3	3	9	4	2	1	28
Потребность в молоке, ц	17	16	19	20	18	

Организовать снабжение так, чтобы потребители обеспечивались молоком, а транспортные расходы были минимальными.

8.9. Автопарки (A_i, $i=\overline{1;5}$) города имеют следующую ежемесячную потребность в бензине: автопарк A_1 — 40 т, A_2 — 30 т, A_3 — 80 т, A_4 —

60 т, A_5 — 50 т. Они снабжаются бензохранилищами ($Б_j$, $j=\overline{1;4}$) следующей вместимости: бензохранилищем $Б_1$ — 55 т, $Б_2$ — 70 т, $Б_3$ — 35 т и $Б_4$ — 100 т. Доставка горючего осуществляется автотранспортом. Средние транспортные издержки в расчете на 1 т приведены в следующей таблице:

Бензохранилище	Автопарк				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$Б_1$	6	5	9	7	4
$Б_2$	10	11	8	3	2
$Б_3$	12	8	7	9	6
$Б_4$	10	7	12	3	5

Составить план перевозки горючего, обеспечивающий минимальные суммарные транспортные затраты.

8.10. На складе А находится сортовое зерно массой 30 т, складе В — 34 т, складе С — 26 т. Зерно надо доставить в пункты № 1 (15 т), № 2 (20 т), № 3 (25 т), № 4 (4 т) и № 5 (6 т). Стоимость доставки 1 т со склада А в пункт № 1 — 4 усл. ед., № 2 — 1 усл. ед., № 3 — 8 усл. ед., № 4 — 3 усл. ед., № 5 — 6 усл. ед.; со склада В в пункт № 1 — 3 усл. ед., № 2 — 5 усл. ед., № 3 — 7 усл. ед., № 4 — 2 усл. ед., № 5 — 1 усл. ед.; со склада С в пункт № 1 — 2 усл. ед., № 2 — 6 усл. ед., № 3 — 9 усл. ед., № 4 — 4 усл. ед., № 5 — 5 усл. ед.

Составить оптимальный план перевозки зерна, минимизирующий стоимость перевозок.

8.11. В городе имеются 5 хлебозаводов, которые снабжаются мукой 3 мелькомбинатами. Все необходимые данные приведены в следующей таблице:

Мелькомбинат	Хлебозавод					Суточная производительность, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	
№ 1	3	8	6	15	4	25
№ 2	5	7	10	13	1	40
№ 3	1	2	12	11	3	35
Суточная потребность в муке, т	30	16	22	18	14	

Найти такой план поставок муки на хлебозавод, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

8.12. Для контроля за космической ракетой установлены датчики типов D_1 (70 шт.), D_2 (50 шт.), D_3 (20 шт.), D_4 (30 шт.). Каждый датчик определяет одну из характеристик (температуру, давление и другие показатели) и результат передает по отдельному каналу связи любому из 6 типов наземных автоматических регистрирующих устройств (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6). Количество устройств P_1 насчитывает 50 шт., P_2 — 40 шт., P_3 — 10 шт., P_4 — 15 шт., P_5 — 25 шт., P_6 — 30 шт. Затраты времени на включение соответствующего канала связи определяются элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

где 8, например, — время, затрачиваемое на включение канала связи датчика D_2 с регистрирующим устройством P_1.

Указать, как следует закрепить датчики за регистрирующими устройствами, чтобы суммарные затраты времени на переключение каналов связи были минимальными.

8.13. Для ежедневного снабжения пунктов B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ферма A_1 выделяет 35 ц молока, ферма A_2 — 40 ц, ферма A_3 — 25 ц молока. Стоимость перевозки 1 ц молока и потребность пунктов в молоке указаны в следующей таблице:

Ферма	Стоимость перевозки 1 ц молока потребителям, усл. ед., в пункты					Количество молока, предназначенное для вывоза, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	3	8	7	10	35
A_2	6	10	5	4	3	40
A_3	4	1	9	10	7	25
Потребность в молоке, ц	17,5	22,5	23	17	20	

Организовать снабжение так, чтобы потребители обеспечивались молоком, а транспортные расходы были минимальными.

8.14. Автопарки (A_i, $i=\overline{1;4}$) города имеют следующую ежемесячную потребность в бензине: автопарк A_1 — 60 т, A_2 — 50 т, A_3 — 70 т, A_4 — 40 т. Они снабжаются бензохранилищами ($Б_j$, $j=\overline{1;3}$) следующей вместимости: бензохранилищем $Б_1$ — 100 т, $Б_2$ — 80 т, $Б_3$ — 40 т. Доставка горючего осуществляется автотранспортом. Средние транспортные издержки в расчете на 1 т приведены в следующей таблице:

Бензохранилище	Автопарк			
	$А_1$	$А_2$	$А_3$	$А_4$
$Б_1$	3	2	4	6
$Б_2$	2	3	1	2
$Б_3$	3	2	7	4

Составить план перевозки горючего, обеспечивающий минимальные суммарные транспортные затраты.

8.15. На складе А находится сортовое зерно массой 32 т, складе В — 28 т, складе С — 20 т. Зерно надо доставить в пункты № 1 (22 т), № 2 (28 т), № 3 (15 т), № 4 (15 т) и № 5 (10 т). Стоимость доставки 1 т со склада А в пункт № 1 — 6 усл. ед., № 2 — 1 усл. ед., № 3 — 2 усл. ед., № 4 — 5 усл. ед., № 5 — 8 усл. ед.; со склада В в пункт № 1 — 7 усл. ед., № 2 — 9 усл. ед., № 3 — 3 усл. ед., № 4 — 6 усл. ед., № 5 — 10 усл. ед.; со склада С в пункт № 1 — 8 усл. ед., № 2 — 10 усл. ед., № 3 — 4 усл. ед., № 4 — 7 усл. ед., № 5 — 9 усл. ед.

Составить оптимальный план перевозки зерна, минимизирующий стоимость перевозок.

8.16. В городе имеются 3 хлебозавода, которые снабжаются мукой 3 мелькомбинатами. Все необходимые данные приведены в следующей таблице:

Мелькомбинат	Хлебозавод			Суточная производительность, т
	№ 1	№ 2	№ 3	
№ 1	4	1	5	18
№ 2	2	3	6	10
№ 3	5	7	4	20
Суточная потребность в муке, т	25	10	13	

Найти такой план поставок муки на хлебозавод, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

8.17. Для контроля за космической ракетой установлены датчики типов D_1 (28 шт.), D_2 (22 шт.), D_3 (30 шт.). Каждый датчик определяет одну из характеристик (температуру, давление и другие показатели) и результат передает по отдельному каналу связи любому из 5 типов наземных автоматических регистрирующих устройств (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5). Количество устройств P_1 насчитывает 19 шт., P_2 — 14 шт., P_3 — 18 шт., P_4 — 12 шт., P_5 — 17 шт. Затраты времени на включение соответствующего канала связи определяются элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} 20 & 3 & 9 & 5 & 4 \\ 4 & 10 & 2 & 20 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

где 5, например, — время, затрачиваемое на включение канала связи датчика D_1 с регистрирующим устройством P_4.

Указать, как следует закрепить датчики за регистрирующими устройствами, чтобы суммарные затраты времени на переключение каналов связи были минимальными.

8.18. Для ежедневного снабжения пунктов B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ферма A_1 выделяет 42 ц молока, ферма A_2 — 28 ц, ферма A_3 — 30 ц молока. Стоимость перевозки 1 ц молока и потребность пунктов в молоке указаны в следующей таблице:

Ферма	Стоимость перевозки 1 ц молока потребителям, усл. ед., в пункты					Количество молока, предназначенное для вывоза, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	4	6	9	20	42
A_2	10	7	3	4	6	28
A_3	1	2	8	15	10	30
Потребность в молоке, ц	35	15	12	28	10	

Организовать снабжение так, чтобы потребители обеспечивались молоком, а транспортные расходы были минимальными.

8.19. Автопарки $(A_i,\ i=\overline{1;4})$ города имеют следующую ежемесячную потребность в бензине: автопарк A_1 — 40 т, A_2 — 60 т, A_3 — 40 т, A_4 — 80 т. Они снабжаются бензохранилищами $(Б_j,\ j=\overline{1;4})$ следующей вместимости: бензохранилищем $Б_1$ — 30 т, $Б_2$ — 80 т, $Б_3$ — 60 т, $Б_4$ — 50 т. Доставка горючего осуществляется автотранспортом. Средние транспортные издержки в расчете на 1 т приведены в следующей таблице:

Бензохранилище	Автопарк			
	A_1	A_2	A_3	A_4
$Б_1$	4,5	3	2	1,2
$Б_2$	4	5	6	1
$Б_3$	3,5	2,6	1,3	1,4
$Б_4$	3,2	4,1	2,5	5,8

Составить план перевозки горючего, обеспечивающий минимальные суммарные транспортные затраты.

8.20. На складе A находится сортовое зерно массой 30 т, складе B — 28 т, складе C — 22 т. Зерно надо доставить в пункты № 1 (18 т), № 2 (14 т), № 3 (19 т), № 4 (12 т) и № 5 (17 т). Стоимость доставки 1 т со склада A в пункт № 1 — 2 усл. ед., № 2 — 1 усл. ед., № 3 — 9 усл. ед., № 4 — 10 усл. ед., № 5 — 6 усл. ед.; со склада B в пункт № 1 — 3 усл. ед., № 2 — 5 усл. ед., № 3 — 1 усл. ед., № 4 — 15 усл. ед., № 5 — 10 усл. ед.; со склада C в пункт № 1 — 9 усл. ед., № 2 — 6 усл. ед., № 3 — 2 усл. ед., № 4 — 7 усл. ед., № 5 — 20 усл. ед.

Составить оптимальный план перевозки зерна, минимизирующий стоимость перевозок.

8.21. В городе имеются 3 хлебозавода, которые снабжаются мукой 3 мелькомбинатами. Все необходимые данные приведены в следующей таблице:

Мелькомбинат	Хлебозавод			Суточная производительность, т
	№ 1	№ 2	№ 3	
№ 1	7	5	3	20
№ 2	4	6	1	40
№ 3	3	1	4	30
Суточная потребность в муке, т	30	40	20	

Найти такой план поставок муки на хлебозавод, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

8.22. Для контроля за космической ракетой установлены датчики типов D_1 (40 шт.), D_2 (25 шт.), D_3 (38 шт.). Каждый датчик определяет одну из характеристик (температуру, давление и другие показатели) и результат передает по отдельному каналу связи любому из 5 типов наземных автоматических регистрирующих устройств (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5). Количество устройств P_1 насчитывает 20 шт., P_2 — 17 шт., P_3 —

23 шт., P_4 — 22,5 шт., P_5 — 17,5 шт. Затраты времени на включение соответствующего канала связи определяются элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & 10 \\ 20 & 7 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix},$$

где 8, например, — время, затрачиваемое на включение канала связи датчика D_3 с регистрирующим устройством P_4.

Указать, как следует закрепить датчики за регистрирующими устройствами, чтобы суммарные затраты времени на переключение каналов связи были минимальными.

8.23. Для ежедневного снабжения пунктов B_1, B_2, B_3 ферма A_1 выделяет 40 ц молока, ферма A_2 — 50 ц, ферма A_3 — 60 ц, ферма A_4 — 30 ц молока. Стоимость перевозки 1 ц молока и потребность пунктов в молоке указаны в следующей таблице:

Ферма	Стоимость перевозки 1 ц молока потребителям, усл. ед., в пункты			Количество молока, предназначенное для вывоза, ц
	B_1	B_2	B_3	
A_1	4	3	5	40
A_2	6	2	1	50
A_3	7	4	2	60
A_4	5	6	3	30
Потребность в молоке, ц	60	80	40	

Организовать снабжение так, чтобы потребители обеспечивались молоком, а транспортные расходы были минимальными.

8.24. Автопарки $(A_i, i=\overline{1;4})$ города имеют следующую ежемесячную потребность в бензине: автопарк A_1 — 200 т, A_2 — 180 т, A_3 — 60 т, A_4 — 90 т. Они снабжаются бензохранилищами ($Б_j$, $j=\overline{1;3}$) следующей вместимости: бензохранилищем $Б_1$ — 200 т, $Б_2$ — 240 т, $Б_3$ — 90 т. Доставка горючего осуществляется автотранспортом. Средние транспортные издержки в расчете на 1 т приведены в следующей таблице:

Бензохранилище	Автопарк			
	A_1	A_2	A_3	A_4
$Б_1$	2	2,8	3,5	1,3
$Б_2$	1,5	2,5	0	4
$Б_3$	2	1,2	0	1,5

Составить план перевозки горючего, обеспечивающий минимальные суммарные транспортные затраты.

8.25. На складе А находится сортовое зерно массой 15 т, складе В — 20 т, складе С — 15 т. Зерно надо доставить в пункты № 1 (16 т), № 2 (7 т), № 3 (9 т), № 4 (8 т) и № 5 (10 т). Стоимость доставки 1 т со склада А в пункт № 1 — 8 усл. ед., № 2 — 10 усл. ед., № 3 — 7 усл. ед., № 4 — 1 усл. ед., № 5 — 6 усл. ед.; со склада В в пункт № 1 — 4 усл. ед., № 2 — 20 усл. ед., № 3 — 2 усл. ед., № 4 — 5 усл. ед., № 5 — 7 усл. ед.; со склада С в пункт № 1 — 5 усл. ед., № 2 — 2 усл. ед., № 3 — 1 усл. ед., № 4 — 10 усл. ед., № 5 — 9 усл. ед.

Составить оптимальный план перевозки зерна, минимизирующий стоимость перевозок.

8.26. В городе имеются 4 хлебозавода, которые снабжаются мукой 3 мелькомбинатами. Все необходимые данные приведены в следующей таблице:

Мелькомбинат	Хлебозавод				Суточная производительность, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
№ 1	4	2	5	7	40
№ 2	6	0	3	1	30
№ 3	5	4	2	6	30
Суточная потребность в муке, т	20	25	30	25	

Найти такой план поставок муки на хлебозавод, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

8.27. Для контроля за космической ракетой установлены датчики типов D_1 (25 шт.), D_2 (25 шт.), D_3 (20 шт.). Каждый датчик определяет одну из характеристик (температуру, давление и другие показатели) и результат передает по отдельному каналу связи любому из 5 типов наземных автоматических регистрирующих устройств (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5). Количество устройств P_1 насчитывает 12 шт., P_2 — 11 шт., P_3 — 8,5 шт., P_4 — 19,5 шт., P_5 — 19 шт. Затраты времени на включение соответствующего канала связи определяются элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 4 & 1 \\ 20 & 9 & 19 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

где 19, например, — время, затрачиваемое на включение канала связи датчика D_2 с регистрирующим устройством P_3.

Указать, как следует закрепить датчики за регистрирующими устройствами, чтобы суммарные затраты времени на переключение каналов связи были минимальными.

8.28. Для ежедневного снабжения пунктов B_1, B_2, B_3, B_4 ферма A_1 выделяет 100 ц молока, ферма A_2 — 150 ц, ферма A_3 — 50 ц молока. Стоимость перевозки 1 ц молока и потребность пунктов в молоке указаны в следующей таблице:

Ферма	Стоимость перевозки 1 ц молока потребителям, усл. ед., в пункты				Количество молока, предназначенное для вывоза, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	3	10	20	4	50
Потребность в молоке, ц	75	80	60	85	

Организовать снабжение так, чтобы потребители обеспечивались молоком, а транспортные расходы были минимальными.

8.29. Автопарки $(A_i, i=\overline{1;5})$ города имеют следующую ежемесячную потребность в бензине: автопарк A_1 — 190 т, A_2 — 210 т, A_3 — 340 т, A_4 — 150 т, A_5 — 240 т. Они снабжаются бензохранилищами ($Б_j$, $j=\overline{1;3}$) следующей вместимости: бензохранилищем $Б_1$ — 380 т, $Б_2$ — 420 т, $Б_3$ — 200 т. Доставка горючего осуществляется автотранспортом. Средние транспортные издержки в расчете на 1 т приведены в следующей таблице:

Бензохранилище	Автопарк				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$Б_1$	1	3	7	9	2
$Б_2$	2	5	8	4	1
$Б_3$	4	6	10	3	5

Составить план перевозки горючего, обеспечивающий минимальные суммарные транспортные затраты.

8.30. На складе А находится сортовое зерно массой 28 т, складе В — 22 т, складе С — 30 т. Зерно надо доставить в пункты № 1 (17 т), № 2 (12 т), № 3 (19 т), № 4 (14 т) и № 5 (18 т). Стоимость доставки 1 т со склада А в пункт № 1 — 8 усл. ед., № 2 — 2 усл. ед., № 3 — 7 усл. ед., № 4 — 8 усл. ед., № 5 — 3 усл. ед.; со склада В в пункт № 1 — 5 усл. ед., № 2 — 4 усл. ед., № 3 — 2 усл. ед., № 4 — 10 усл. ед., № 5 — 7 усл. ед.; со склада С в пункт № 1 — 10 усл. ед., № 2 — 6 усл. ед., № 3 — 1 усл. ед., № 4 — 5 усл. ед., № 5 — 10 усл. ед.

Составить оптимальный план перевозки зерна, минимизирующий стоимость перевозок.

8.31. В городе имеются 4 хлебозавода, которые снабжаются мукой 3 мелькомбинатами. Все необходимые данные приведены в следующей таблице:

Мелькомбинат	Хлебозавод				Суточная производительность, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
№ 1	4	1	5	3	20
№ 2	2	6	4	7	30
№ 3	2	3	6	4	40
Суточная потребность в муке, т	20	30	20	20	

Найти такой план поставок муки на хлебозавод, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

8.32. Для контроля за космической ракетой установлены датчики типов D_1 (50 шт.), D_2 (20 шт.), D_3 (30 шт.). Каждый датчик определяет одну из характеристик (температуру, давление и другие показатели) и результат передает по отдельному каналу связи любому из 5 типов наземных автоматических регистрирующих устройств (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5). Количество устройств P_1 насчитывает 30 шт., P_2 — 15 шт., P_3 — 25 шт., P_4 — 20 шт., P_5 — 10 шт. Затраты времени на включение соответствующего канала связи определяются элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 1 & 10 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & 6 & 2 & 20 \end{pmatrix},$$

где 10, например, — время, затрачиваемое на включение канала связи датчика D_2 с регистрирующим устройством P_3.

Указать, как следует закрепить датчики за регистрирующими устройствами, чтобы суммарные затраты времени на переключение каналов связи были минимальными.

8.33. Для ежедневного снабжения пунктов B_1, B_2, B_3 ферма A_1 выделяет 10 ц молока, ферма A_2 — 15 ц, ферма A_3 — 25 ц, ферма A_4 — 35 ц, ферма A_5 — 15 ц молока. Стоимость перевозки 1 ц молока и потребность пунктов в молоке указаны в следующей таблице:

Ферма	Стоимость перевозки 1 ц молока потребителям, усл. ед., в пункты			Количество молока, предназначенное для вывоза, ц
	B_1	B_2	B_3	
A_1	4	5	6	10
A_2	1	2	3	15
A_3	7	8	9	25
A_4	11	12	10	35
A_5	13	1	4	15
Потребность в молоке, ц	30	50	20	

Организовать снабжение так, чтобы потребители обеспечивались молоком, а транспортные расходы были минимальными.

8.34. Автопарки $(A_i, i=\overline{1;5})$ города имеют следующую ежемесячную потребность в бензине: автопарк A_1 — 150 т, A_2 — 200 т, A_3 — 250 т, A_4 — 40 т, A_5 — 60 т. Они снабжаются бензохранилищами ($Б_j$, $j=\overline{1;3}$) следующей вместимости: бензохранилищем $Б_1$ — 300 т, $Б_2$ — 340 т, $Б_3$ — 260 т. Доставка горючего осуществляется автотранспортом. Средние транспортные издержки в расчете на 1 т приведены в следующей таблице:

Бензохранилище	Автопарк				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$Б_1$	4	1	8	3	6
$Б_2$	3	5	7	2	1
$Б_3$	2	6	9	4	5

Составить план перевозок горючего, обеспечивающий минимальные суммарные транспортные затраты.

8.35. На складе А находится сортовое зерно массой 30 т, складе В — 15 т, складе С — 25 т. Зерно надо доставить в пункты № 1 (20 т), № 2 (10 т), № 3 (30 т) и № 4 (10 т). Стоимость доставки 1 т со склада А в пункт № 1 — 2 усл. ед., № 2 — 3 усл. ед., № 3 — 8 усл. ед., № 4 — 4 усл. ед.; со склада В в пункт № 1 — 1 усл. ед., № 2 — 5 усл. ед., № 3 — 7 усл. ед., № 4 — 2 усл. ед.; со склада С в пункт № 1— 4 усл. ед., № 2 — 6 усл. ед., № 3 — 9 усл. ед., № 4 — 3 усл. ед.

Составить оптимальный план перевозки зерна, минимизирующий стоимость перевозок.

Задание 9. Найти решение транспортной задачи:

9.1. $a_1 = 14$, $b_1 = 19$,
$a_2 = 21$, $b_2 = 27$,
$a_3 = 20$; $b_3 = 18$;

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 11 \\ 4 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

9.2. $a_1 = 17$, $b_1 = 14$,
$a_2 = 23$, $b_2 = 7$,
$a_3 = 10$; $b_3 = 12$;

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 2 & 7 & 6 \\ 12 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

9.3. $a_1 = 26$, $b_1 = 35$,
$a_2 = 17$, $b_2 = 12$,
$a_3 = 10$; $b_3 = 21$;

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 10 \\ 1 & 5 & 2 \\ 14 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

9.4. $a_1 = 31$, $b_1 = 21$,
$a_2 = 17$, $b_2 = 15$,
$a_3 = 22$; $b_3 = 19$;

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 1 \\ 6 & 12 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

9.5. $a_1 = 24$, $b_1 = 16$,
$a_2 = 12$, $b_2 = 32$,
$a_3 = 18$; $b_3 = 26$;

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 14 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

9.6. $a_1 = 13$, $b_1 = 20$,
$a_2 = 29$, $b_2 = 23$,
$a_3 = 27$; $b_3 = 19$;

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 16 & 11 \\ 10 & 9 & 12 \\ 5 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

9.7. $a_1 = 30$, $b_1 = 22$,
$a_2 = 12$, $b_2 = 18$,
$a_3 = 15$; $b_3 = 31$;

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 9 \\ 13 & 10 & 5 \\ 7 & 19 & 21 \end{pmatrix}.$$

9.8. $a_1 = 15$, $b_1 = 21$,
$a_2 = 29$, $b_2 = 13$,
$a_3 = 24$; $b_3 = 17$;

$$C = \begin{pmatrix} 17 & 9 & 11 \\ 3 & 10 & 7 \\ 15 & 22 & 13 \end{pmatrix}.$$

9.9. $a_1 = 19$, $b_1 = 13$,
$a_2 = 21$, $b_2 = 34$,
$a_3 = 18$; $b_3 = 27$;

$$C = \begin{pmatrix} 21 & 7 & 13 \\ 9 & 17 & 20 \\ 14 & 10 & 19 \end{pmatrix}.$$

9.10. $a_1 = 27$, $b_1 = 18$,
$a_2 = 13$, $b_2 = 20$,
$a_3 = 22$; $b_3 = 15$;

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 23 & 14 \\ 18 & 9 & 26 \\ 21 & 13 & 17 \end{pmatrix}.$$

9.11. $a_1 = 12$, $b_1 = 25$,
$a_2 = 22$, $b_2 = 14$,
$a_3 = 16$; $b_3 = 33$;

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 16 \\ 23 & 17 & 7 \\ 9 & 20 & 19 \end{pmatrix}.$$

9.12. $a_1 = 16$, $b_1 = 31$,
$a_2 = 34$, $b_2 = 12$,
$a_3 = 26$; $b_3 = 10$;

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 17 & 9 \\ 13 & 11 & 19 \\ 21 & 23 & 15 \end{pmatrix}.$$

9.13. $a_1 = 22$, $b_1 = 15$,
$a_2 = 10$, $b_2 = 36$,
$a_3 = 27$; $b_3 = 11$;

$$C = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 21 \\ 24 & 18 & 9 \\ 11 & 25 & 13 \end{pmatrix}.$$

9.14. $a_1 = 13$, $b_1 = 29$,
$a_2 = 32$, $b_2 = 11$,
$a_3 = 20$; $b_3 = 15$;

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 20 \\ 16 & 23 & 13 \\ 25 & 19 & 6 \end{pmatrix}.$$

9.15. $a_1 = 26$, $b_1 = 16$,
$a_2 = 14$, $b_2 = 34$,
$a_3 = 17$; $b_3 = 12$;

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 25 & 11 \\ 15 & 10 & 23 \\ 21 & 27 & 9 \end{pmatrix}.$$

9.16. $a_1 = 32$, $b_1 = 26$,
$a_2 = 15$, $b_2 = 19$,
$a_3 = 23$; $b_3 = 18$;

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 13 \\ 24 & 17 & 10 \\ 11 & 15 & 19 \end{pmatrix}.$$

9.17. $a_1 = 31$, $b_1 = 29$,
$a_2 = 15$, $b_2 = 32$,
$a_3 = 10$; $b_3 = 17$;

$$C = \begin{pmatrix} 24 & 13 & 19 \\ 11 & 23 & 15 \\ 14 & 17 & 26 \end{pmatrix}.$$

9.18. $a_1 = 18$, $b_1 = 21$,
$a_2 = 22$, $b_2 = 13$,
$a_3 = 27$; $b_3 = 15$;

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 21 & 9 \\ 27 & 13 & 17 \\ 22 & 12 & 24 \end{pmatrix}.$$

9.19. $a_1 = 17$, $b_1 = 19$,
$a_2 = 26$, $b_2 = 34$,
$a_3 = 11$; $b_3 = 21$;

$$C = \begin{pmatrix} 18 & 11 & 23 \\ 13 & 9 & 16 \\ 21 & 14 & 10 \end{pmatrix}.$$

9.20. $a_1 = 26$, $b_1 = 24$,
$a_2 = 35$, $b_2 = 13$,
$a_3 = 14$; $b_3 = 10$;

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 16 \\ 21 & 15 & 24 \\ 26 & 19 & 20 \end{pmatrix}.$$

9.21. $a_1 = 21$, $b_1 = 33$,
$a_2 = 18$, $b_2 = 11$,
$a_3 = 16$; $b_3 = 24$;
$$C = \begin{pmatrix} 27 & 19 & 21 \\ 7 & 13 & 16 \\ 15 & 9 & 17 \end{pmatrix}.$$

9.22. $a_1 = 17$, $b_1 = 22$,
$a_2 = 36$, $b_2 = 13$,
$a_3 = 19$; $b_3 = 16$;
$$C = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 24 \\ 20 & 12 & 18 \\ 14 & 16 & 10 \end{pmatrix}.$$

9.23. $a_1 = 24$, $b_1 = 18$,
$a_2 = 17$, $b_2 = 35$,
$a_3 = 20$; $b_3 = 27$;
$$C = \begin{pmatrix} 11 & 23 & 13 \\ 22 & 17 & 9 \\ 26 & 10 & 15 \end{pmatrix}.$$

9.24. $a_1 = 29$, $b_1 = 16$,
$a_2 = 21$, $b_2 = 23$,
$a_3 = 11$; $b_3 = 14$;
$$C = \begin{pmatrix} 26 & 14 & 11 \\ 9 & 13 & 16 \\ 21 & 18 & 22 \end{pmatrix}.$$

9.25. $a_1 = 13$, $b_1 = 26$,
$a_2 = 28$, $b_2 = 17$,
$a_3 = 25$; $b_3 = 31$;
$$C = \begin{pmatrix} 21 & 13 & 16 \\ 19 & 27 & 24 \\ 26 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

9.26. $a_1 = 19$, $b_1 = 20$,
$a_2 = 33$, $b_2 = 21$,
$a_3 = 16$; $b_3 = 12$;
$$C = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 24 \\ 26 & 9 & 27 \\ 10 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$

9.27. $a_1 = 23$, $b_1 = 12$,
$a_2 = 16$, $b_2 = 32$,
$a_3 = 14$; $b_3 = 19$;
$$C = \begin{pmatrix} 15 & 21 & 11 \\ 10 & 14 & 24 \\ 26 & 17 & 12 \end{pmatrix}.$$

9.28. $a_1 = 36$, $b_1 = 29$,
$a_2 = 13$, $b_2 = 10$,
$a_3 = 16$; $b_3 = 15$;
$$C = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 25 \\ 21 & 19 & 23 \\ 9 & 11 & 16 \end{pmatrix}.$$

9.29. $a_1 = 21$, $b_1 = 19$,
$a_2 = 11$, $b_2 = 18$,
$a_3 = 14$; $b_3 = 23$;
$$C = \begin{pmatrix} 22 & 17 & 9 \\ 13 & 11 & 26 \\ 24 & 16 & 21 \end{pmatrix}.$$

9.30. $a_1 = 17$, $b_1 = 23$,
$a_2 = 34$, $b_2 = 14$,
$a_3 = 11$; $b_3 = 12$;
$$C = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 21 \\ 24 & 12 & 25 \\ 11 & 10 & 15 \end{pmatrix}.$$

9.31. $a_1 = 19$, $b_1 = 27$,
$a_2 = 20$, $b_2 = 32$,
$a_3 = 15$; $b_3 = 18$;
$$C = \begin{pmatrix} 10 & 24 & 13 \\ 16 & 17 & 21 \\ 9 & 27 & 12 \end{pmatrix}.$$

9.32. $a_1 = 36$, $b_1 = 21$,
$a_2 = 12$, $b_2 = 19$,
$a_3 = 14$; $b_3 = 11$;
$$C = \begin{pmatrix} 26 & 11 & 23 \\ 12 & 20 & 19 \\ 16 & 9 & 21 \end{pmatrix}.$$

9.33. $a_1 = 32$, $b_1 = 27$,
$a_2 = 10$, $b_2 = 21$,
$a_3 = 13$; $b_3 = 14$;

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 12 & 17 \\ 13 & 22 & 19 \\ 24 & 16 & 10 \end{pmatrix}.$$

9.34. $a_1 = 10$, $b_1 = 24$,
$a_2 = 35$, $b_2 = 16$,
$a_3 = 24$; $b_3 = 17$;

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 26 & 17 \\ 18 & 13 & 22 \\ 24 & 19 & 21 \end{pmatrix}.$$

9.35. $a_1 = 21$, $b_1 = 37$,
$a_2 = 19$, $b_2 = 24$,
$a_3 = 26$; $b_3 = 14$;

$$C = \begin{pmatrix} 23 & 12 & 16 \\ 19 & 9 & 21 \\ 13 & 27 & 14 \end{pmatrix}.$$

Задание 10. Найти методом Гомори максимум или минимум целевой функции при заданной системе ограничений. Во всех задачах $x_j \geq 0$ и x_j — целые (j = 1,2 или $j = \overline{1;3}$).

10.1. $f = x_1 + 4x_2 \to \max$;
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6. \end{cases}$$

10.2. $f = 3x_1 + 4x_2 \to \max$;
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 4x_2 \leq 10. \end{cases}$$

10.3. $f = x_1 + x_2 \to \max$;
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 7, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 10. \end{cases}$$

10.4. $f = x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \min$;
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 \leq 3, \\ -4x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 6. \end{cases}$$

10.5. $f = 2x_1 \to \max$;
$$\begin{cases} 13x_1 + 9x_2 \leq 38, \\ 2x_2 \leq 7, \\ -x_1 + 9x_2 \leq 5. \end{cases}$$

10.6. $f = 5x_1 - 3x_2 \to \max$;
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 2, \\ 5x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases}$$

10.7. $f = 7x_1 - x_2 \to \max$;
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \leq 4, \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 6. \end{cases}$$

10.8. $f = 2x_1 \to \max$;
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ 5x_1 - x_2 \leq 9. \end{cases}$$

10.9. $f = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \min$;
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + 4x_2 \leq 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13. \end{cases}$$

10.10. $f = 2x_1 + x_2 \to \max$;
$$\begin{cases} 13x_1 - 7x_2 \leq 34, \\ 2x_1 + x_2 \leq 3, \\ -x_1 + 13x_2 \leq 1. \end{cases}$$

10.11. $f = 5x_1 - 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 8. \end{cases}$$

10.12. $f = 7x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \le 8, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 10. \end{cases}$$

10.13. $f = 2x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 5x_1 + x_2 \le 9. \end{cases}$$

10.14. $f = -2x_1 - x_2 + 4x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \le 3, \\ -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 7. \end{cases}$$

10.15. $f = 3x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 15x_1 - 7x_2 \le 40, \\ 3x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 13x_2 \le 7. \end{cases}$$

10.16. $f = 3x_1 - x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_2 \le 1, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 4. \end{cases}$$

10.17. $f = x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 + x_2 \le 4. \end{cases}$$

10.18. $f = 3x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 26, \\ 7x_1 + x_2 \le 15. \end{cases}$$

10.19. $f = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ -4x_1 - 2x_2 - x_3 \le 2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5. \end{cases}$$

10.20. $f = x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5. \end{cases}$$

10.21. $f = 100x_1 + 90x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 5. \end{cases}$$

10.22. $f = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \le 88, \\ x_1 \le 22, \\ 5x_2 \le 90. \end{cases}$$

10.23. $f = 3x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 1. \end{cases}$$

10.24. $f = 14x_1 + 6x_2 + 22x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 \le 12, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 \le 27, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6. \end{cases}$$

10.25. $f = 4x_1 + 6x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 3. \end{cases}$$

10.26. $f = 6x_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6. \end{cases}$$

10.27. $f = x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \le 51, \\ -6x_1 + 3x_2 \le 1, \\ x_1 \le 1. \end{cases}$$

10.28. $f = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 2. \end{cases}$$

10.29. $f = x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \le 51, \\ -6x_1 + 3x_2 \le 1, \\ x_1 \le 1. \end{cases}$$

10.30. $f = 50x_1 + 40x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 60. \end{cases}$$

10.31. $f = 6x_1 + 15x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 6, \\ 7x_1 + 10x_2 \le 70, \\ -4x_1 + 5x_2 \le 20. \end{cases}$$

10.32. $f = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_3 \le 7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12. \end{cases}$$

10.33. $f = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13. \end{cases}$$

10.34. $f = 3x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 11x_2 \le 44, \\ x_1 \le 5. \end{cases}$$

10.35. $f = x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 \le 24, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13. \end{cases}$$

Задание 11. С помощью метода Лагранжа найти точки условных экстремумов функции:

11.1. $z = 3x_1 + 2x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 9.$

11.2. $z = x_1 + 2x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 5.$

11.3. $z = x_1^2 - x_2^2$ при $2x_1 - x_2 = 6.$

11.4. $z = 2x_1 - 3x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 13.$

11.5. $z = x_1 \cdot x_2$ при $x_1 + x_2 = 1.$

11.6. $z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^3$ при $x_1 + x_2 + x_3 = 12.$

11.7. $z = 3x_1 + 4x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 16.$

11.8. $z = 3x_1^2 - 4x_2^2$ при $x_1 + x_2 = 2.$

11.9. $z = 4x_1 - 3x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 25.$

11.10. $z = 5x_1^2 + x_2^2$ при $3x_1 - 2x_2 = 4.$

11.11. $z = \dfrac{x_1}{4} + \dfrac{x_2}{5}$ при $x_1^2 + x_2^2 = 2.$

11.12. $z = 2x_1^2 + x_2^2$ при $3x_1 + 4x_2 = 5.$

11.13. $z = 4x_1 + 5x_2$ при $x_1^2 + 2x_2^2 = 4.$

11.14. $z = x_1 \cdot x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 2.$

11.15. $z = 3x_1^2 + 2x_2^2$ при $x_1 + 3x_2 = 4.$

11.16. $z = x_1^2 + 3x_2^2$ при $x_1 - 4x_2 = 7.$

11.17. $z = 5x_1 + 4x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 36.$

11.18. $z = x_1 - 2x_2 + 2x_3$ при $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9.$

11.19. $z = x_1^2 + 3x_2^2$ при $x_1 + 5x_2 = 4.$

11.20. $z = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ при $x_1 - x_2 + x_3 = 4.$

11.21. $z = \dfrac{x_1}{2} + \dfrac{x_2}{3}$ при $x_1^2 + x_2^2 = 1.$

11.22. $z = 3x_1^2 + 3x_2^2$ при $x_1 + x_2 = 1.$

11.23. $z = x_1 - 4x_2$ при $2x_1^2 + x_2^2 = 16.$

11.24. $z = x_1^2 + x_2^2$ при $\dfrac{x_1}{2} + \dfrac{x_2}{3} = 1.$

11.25. $z = 3x_1 + 5x_2$ при $2x_1^2 + x_2^2 = 2.$

11.26. $z = \dfrac{x_1}{2} + \dfrac{x_2}{5}$ при $x_1^2 + x_2^2 = 4.$

11.27. $z = 3x_1^2 + x_2^2$ при $\dfrac{x_1}{4} + \dfrac{x_2}{6} = 1.$

11.28. $z = x_1 \cdot x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 4$

11.29. $z = 2x_1 - x_2 + x_3$ при $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$

11.30. $z = 6 - 4x_1 - 3x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 1.$

11.31. $z = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{4}$ при $x_1^2 + x_2^2 = 25.$

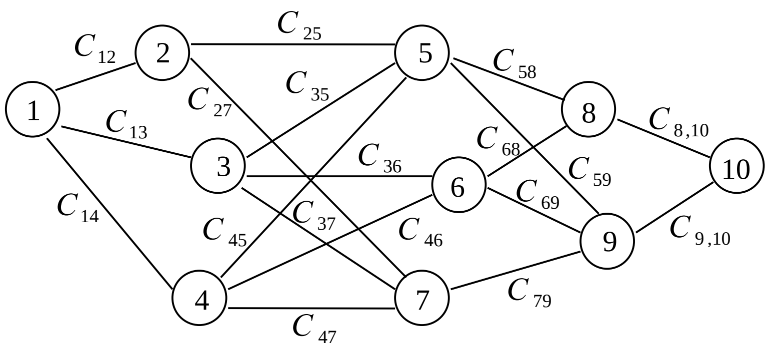
11.32. $z = x_1^2 + 2x_2^2$ при $\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} = 1.$

11.33. $z = 2x_1^2 + 3x_2^2$ при $x_1 + 2x_2 = 3.$

11.34. $z = 5 - 3x_1 + 4x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 1.$

11.35. $z = 3x_1 - 4x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 5.$

Задание 12. На рисунке показана сеть дорог.



В таблице приведены расстояния (в км) между промежуточными пунктами сети.

Исходя из данных рисунка и таблицы выполнить следующее:

- методом динамического программирования найти самый короткий маршрут из пункта 1 в пункт 10;
- составить таблицу оптимальных маршрутов из всех остальных пунктов сети в пункт 10 и указать кратчайшее расстояние от каждого пункта до пункта 10.

	Номер задачи											
	12.1	12.2	12.3	12.4	12.5	12.6	12.7	12.8	12.9	12.10	12.11	12.12
C_{12}	7	4	9	1	5	8	3	6	1	4	7	4
C_{13}	3	8	2	6	3	1	5	2	9	6	3	8
C_{14}	5	4	5	2	8	5	4	6	3	1	5	4
C_{25}	2	6	3	5	2	9	1	7	8	3	2	6
C_{27}	7	1	7	3	5	2	6	3	7	5	7	1
C_{35}	9	9	4	6	8	6	2	9	4	7	9	9
C_{36}	3	3	6	8	1	8	7	2	9	3	3	3
C_{37}	1	5	8	4	7	4	4	8	3	6	1	5
C_{45}	8	4	1	7	5	5	6	5	7	2	8	4
C_{46}	4	8	2	2	9	2	8	2	4	5	4	8
C_{47}	5	2	5	9	1	6	3	9	8	9	5	2
C_{58}	2	7	8	5	3	6	1	4	6	1	2	7
C_{59}	6	4	7	3	5	8	4	9	2	7	6	8
C_{68}	1	9	1	1	8	3	6	2	5	9	1	9
C_{69}	9	6	4	7	2	9	2	8	1	3	9	6
C_{79}	4	1	5	4	6	7	4	6	7	6	4	1
$C_{8,10}$	3	7	9	6	3	1	8	1	9	4	3	7
$C_{9,10}$	8	2	5	1	8	2	3	5	3	8	9	2

Продолжение

	Номер задачи											
	12.13	12.14	12.15	12.16	12.17	12.18	12.19	12.20	12.21	12.22	12.23	12.24
C_{12}	9	1	5	8	3	6	1	4	2	3	16	12
C_{13}	2	6	3	1	5	2	9	6	5	5	9	11
C_{14}	5	2	8	5	4	6	3	1	1	8	14	4
C_{25}	3	5	2	9	1	7	3	3	10	8	12	3
C_{27}	7	3	5	2	6	3	7	5	12	9	9	9
C_{35}	4	6	8	6	2	9	4	7	5	9	13	10
C_{36}	6	8	1	8	7	2	9	3	10	7	9	13
C_{37}	8	4	7	4	4	8	3	6	7	8	10	14
C_{45}	1	7	5	5	6	5	7	2	4	2	10	12
C_{46}	2	2	9	2	8	2	4	5	15	4	9	18
C_{47}	5	9	1	6	3	9	8	9	13	3	7	19
C_{58}	8	5	3	1	7	4	6	1	7	6	9	14
C_{59}	7	3	5	8	2	6	3	8	5	4	11	9
C_{68}	1	6	8	3	9	7	1	2	3	10	15	8
C_{69}	4	1	4	6	2	4	8	3	4	5	14	7
C_{79}	5	4	9	2	8	6	1	5	1	4	12	15
$C_{8,10}$	9	6	2	5	1	7	9	3	1	6	10	14
$C_{9,10}$	5	1	7	9	3	6	4	8	4	3	9	13

Окончание

	Номер задачи										
	12.25	12.26	12.27	12.28	12.29	12.30	12.31	12.32	12.33	12.34	12.35
C_{12}	6	5	3	8	9	7	6	5	9	4	9
C_{13}	2	12	4	4	3	4	1	2	4	6	2
C_{14}	16	6	5	8	4	9	4	9	12	16	7
C_{25}	6	6	6	10	11	1	5	4	8	5	8
C_{27}	15	10	7	3	10	5	7	7	6	8	7
C_{35}	10	15	8	5	7	8	3	3	8	10	4
C_{36}	15	11	7	16	8	3	6	1	7	9	7
C_{37}	13	7	8	11	1	6	2	8	9	7	8
C_{45}	10	6	9	7	5	1	9	6	10	6	9
C_{46}	9	4	10	6	10	4	5	5	11	16	12
C_{47}	7	10	13	10	13	3	8	3	10	13	13
C_{58}	4	14	12	9	4	8	2	1	12	14	11
C_{59}	3	8	15	11	3	10	1	7	13	12	14
C_{68}	5	9	11	12	1	5	5	1	14	11	15
C_{69}	6	11	10	9	8	7	3	8	10	10	10
C_{79}	5	15	9	10	9	6	3	9	8	16	11
$C_{8,10}$	9	13	7	3	7	8	8	3	9	13	13
$C_{9,10}$	7	8	3	5	6	9	1	8	13	14	19

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование : учеб. / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. — Мн. : Выш. шк., 1994. — 286 с.

Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование : учеб. пособие / А. В. Кузнецов [и др.] ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. — Мн. : Выш. шк., 1995. — 382 с.

Руководство к решению задач по математическому программированию : учеб. пособие / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Мн. : Выш. шк., 2001. — 448 с.

Сборник задач по математическому программированию / А. В. Кузнецов, Г. И. Новикова, Н. И. Холод. — Мн. : Выш. шк., 1985. — 143 с.

Сборник задач и упражнений по высшей математике. Общий курс : учеб. пособие / А. В. Кузнецов [и др.]. — Мн. : Выш. шк., 1994. — 284 с.

Карасев, А. И. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2 ч. Ч. 2. Теория вероятностей и математическая статистика. Линейное программирование : учеб. пособие для студентов вузов / А. И. Карасев, З. М. Аксютина, Т. И. Савельева. — М. : Высш. шк., 1982. — 320 с.

Данко, Н. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. : учеб. пособие для вузов / Н. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 5-е изд., испр. — М. : Высш. шк., 1999. — 304 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Пособие
по самостоятельному изучению основных вопросов программы курса и задания для самостоятельной работы студентов экономических специальностей

Авторы-составители: **Мокеева** Светлана Александровна
Кузменкова Инна Анатольевна
Миронович Елена Михайловна
Мокеева Ольга Александровна

Редактор *О. М. Ковалева*
Компьютерная верстка *И. А. Козлова*

Подписано в печать 30.09.05. Бумага типографская № 1.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 6,74. Уч.-изд. л. 5,9. Тираж 570 экз.
Заказ №

УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации».
ЛИ № 02330 / 0056814 от 02.03.2004 г.
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.

Отпечатано в УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации».
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.

ISBN 985-461-144-2

9 789854 611440 >

БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Пособие
по самостоятельному изучению основных вопросов программы курса и задания для самостоятельной работы студентов экономических специальностей

Гомель 2005

БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

**Пособие
по самостоятельному изучению основных вопросов
программы курса и задания для самостоятельной работы
студентов экономических специальностей**

Гомель 2005